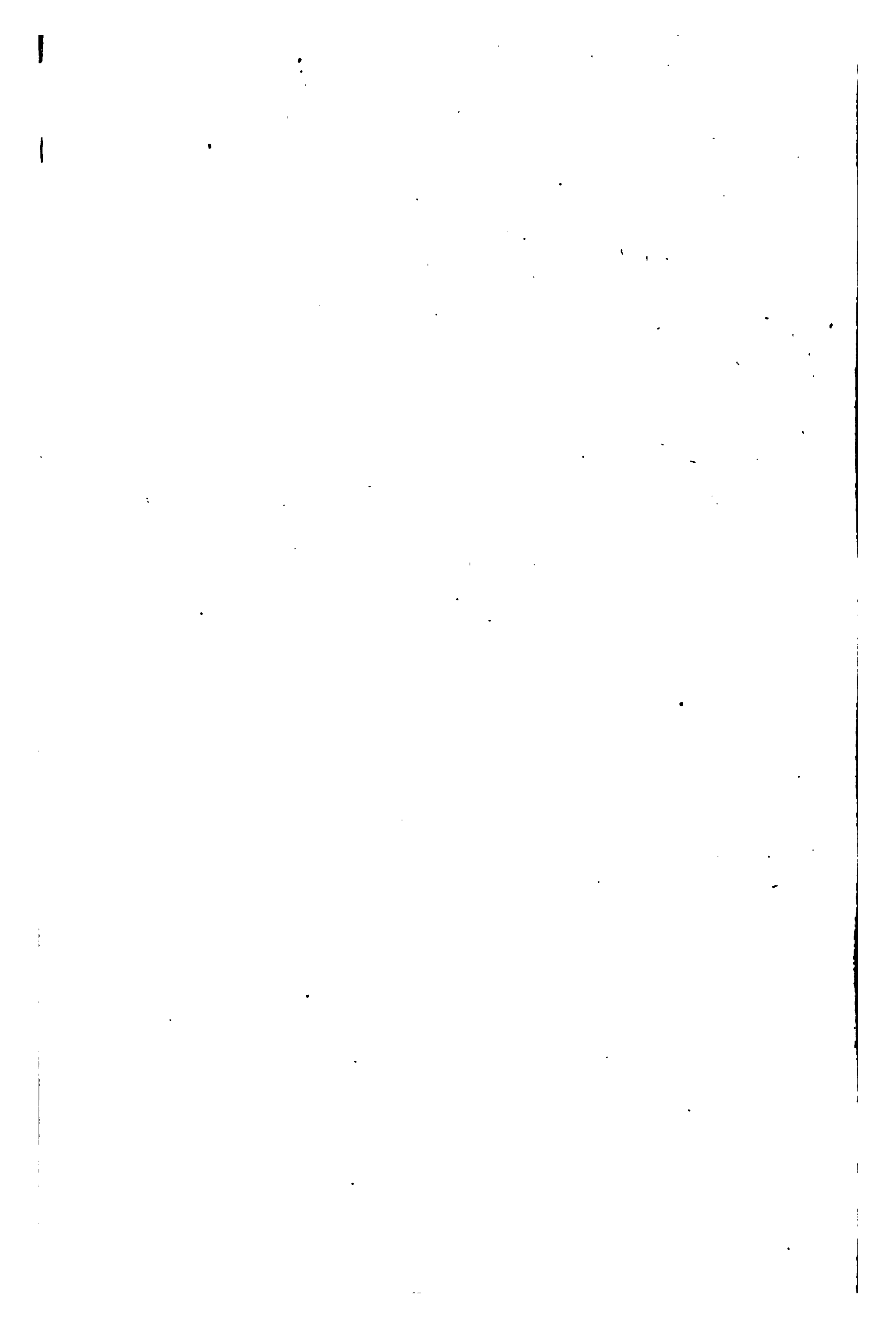


ANWENDUNGEN

DER

GRAPHISCHEN STATIK.

NACH

PROFESSOR DR. C. CULMANN

BEARBEITET

VON

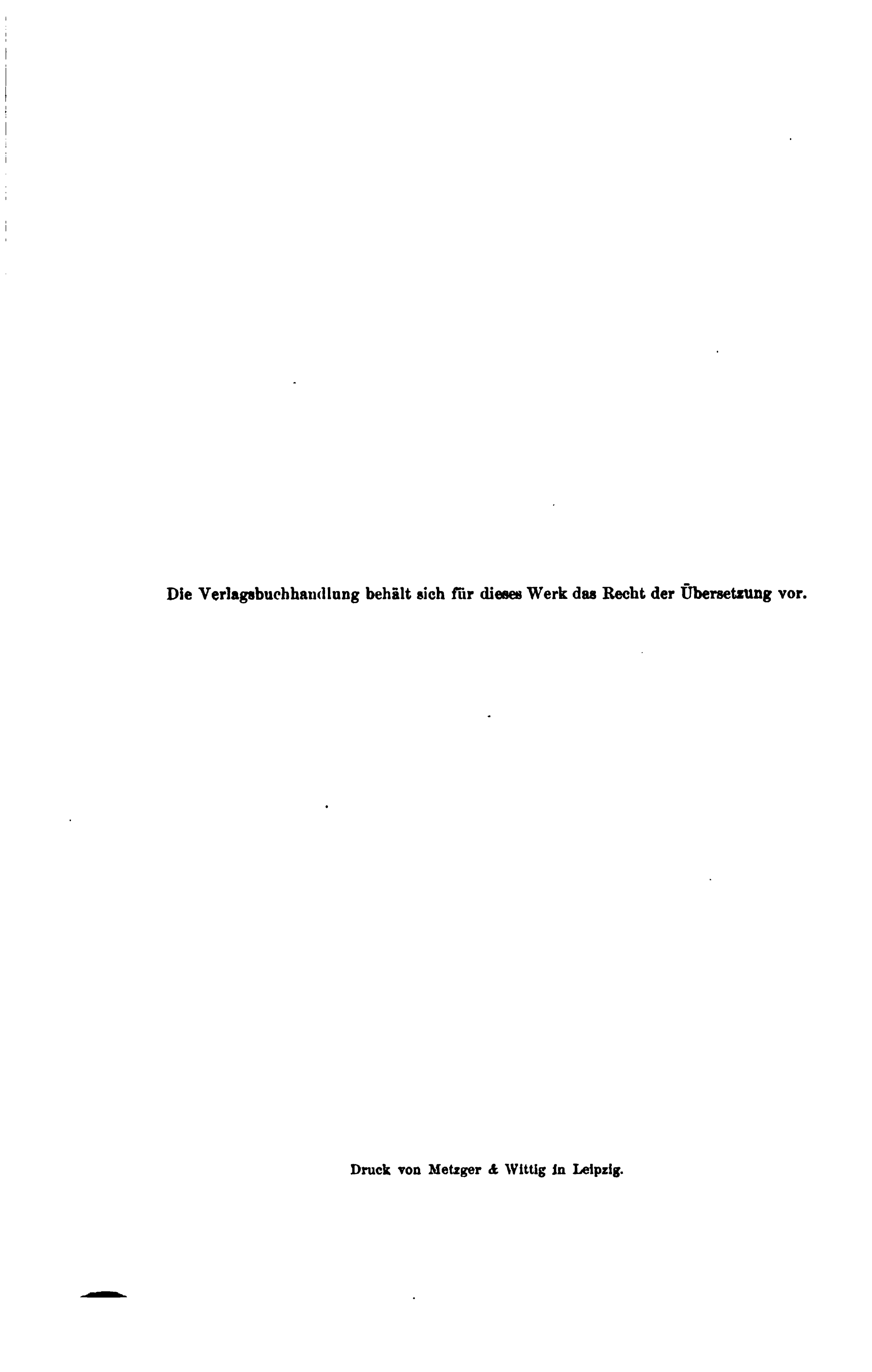
DR. W. RITTER,
VORM. PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH.

Vierter Teil.

Der Bogen.

Mit 120 Textfiguren und 3 Tafeln.

ZÜRICH
VERLAG VON ALBERT RAUSTEIN
VORMALS MEYER & ZELLERS VERLAG
1906.



Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Im Jahre 1900 erschien der dritte Band der „Anwendungen der Graphischen Statik“, in dessen Vorwort der Verfasser die Hoffnung ausdrückte, diesem Bande in möglichst kurzer Zeit noch zwei weitere folgen zu lassen. Als im Frühling 1902 der vierte Band in vorliegendem Umfange fertig war, überraschte den Verfasser eine Krankheit, die seinem Schaffen ein plötzliches Halt gebot. Die Hoffnung auf Genesung bewog ihn immer wieder, die Herausgabe des bereits Geschriebenen aufzuschieben. Denn noch sollten den vier Kapiteln über die verschiedenen Bogenarten vier weitere, allerdings kürzere Kapitel folgen.

Wie nun aber die Krankheit Fortschritte machte und eine vollständige Genesung nicht mehr zu erwarten war, ersuchte mich der Verfasser, die kleinen Lücken in dem bereits vorhandenen Teil auszufüllen und das Buch dem Drucke zu übergeben.

Die letzten Nummern des gelenklosen Bogens bestanden nämlich erst in Stenogramm, wonach ich den Text zu schreiben und die Figuren zu zeichnen hatte. Ferner waren von den drei Tafeln nur die beiden ersten gezeichnet, die dritte hatte ich an der Hand von Plänen, die mein Vater seinerzeit angefertigt, zu konstruieren und darauf zu allen drei Tafeln (zu den zwei ersten nach vorhandenen Notizen) den erklärenden Text zu schreiben.

Abgesehen von einigen nebensächlichen Punkten, sind dies die einzigen Stellen, die nicht rein aus des Verfassers Hand stammen. Stets habe ich mich aber streng an die vorhandenen Notizen ge-

halten und mich bemüht, den Text im Sinne des Verfassers zu halten. —

Ich möchte hiermit Herrn Ingenieur R. Walther, welcher die Textfiguren und die beiden ersten Tafeln gezeichnet und mir auch bei der Fertigstellung des Buches schätzbare Dienste geleistet, meinen und meines Vaters verbindlichen Dank aussprechen; ebenso Herrn Oberingenieur Md. Kinkel, der mir in liebenswürdiger Weise seine Hilfe und seinen Rat zuteil werden liess.

Zürich, im Januar 1906.

H. Ritter.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Bogen mit drei Gelenken.

Zweites Kapitel.

Bogen mit zwei Gelenken.

Drittes Kapitel.

Bogen mit einem Gelenk.

Viertes Kapitel.

Bogen ohne Gelenke.

Verzeichnis der Tafeln.

Erstes Kapitel.

Bogen mit drei Gelenken.

1. Allgemeines.

Der Unterschied zwischen einem Balken- und einem Bogenträger besteht in statischer Hinsicht darin, dass ersterer lotrechte, letzterer schiefe Kräfte auf seine Lager ausübt. Wird ein Träger an dem einen Ende auf ein festes, am andern Ende auf ein Rollenlager gelegt, so ist er, vom statischen Standpunkt aus betrachtet, ein Balkenträger, gleichgültig, ob seine Achse geradlinig oder gebogen ist. Ein Träger dagegen, der an beiden Enden unverschieblich festgehalten wird, ist ein Bogenträger, auch wenn seine Achse nur wenig oder gar nicht gekrümmt ist.

Von dieser Regel werden wir nur insofern abweichen, als wir auch diejenigen Träger zu den Bogenträgern zählen, deren wagrechter Schub durch ein Zugband aufgenommen wird, so dass die Auflagerdrücke lotrechte Richtung annehmen. Die Sprengwerke, die streng genommen auch Bogenträger sind, haben wir schon im vorigen Teil (der kontinuierliche Balken) behandelt.

Setzt man den Auflagerdruck eines Bogenträgers fortlaufend mit den Belastungen zusammen, so entsteht ein Seilpolygon, das man „Drucklinie“ nennt. Die Drucklinie gibt für jeden durch den Träger geführten Schnitt die Lage und Richtung der ausserhalb wirkenden Kraft an; die Grösse dieser Kraft wird in der Regel dem entsprechenden Kräftepolygon entnommen. Die wagrechte Teilkraft der Drucklinie nennen wir „Bogenschub“ oder „Horizontalschub“.

Werden in einen Bogenträger Gelenke eingeschaltet, so wird die Drucklinie gezwungen, durch die Gelenkmittelpunkte zu gehen.

Denn wenn die Drucklinie seitwärts an einem Gelenke vorbeiginge, so müsste, abgesehen von Reibungswiderständen, der Träger daselbst zusammenknicken. Man unterscheidet Bogen mit 0, 1, 2 und 3 Gelenken. Mehr als 3 Gelenke darf ein einfacher Bogenträger nicht bekommen, weil er sonst unstabil würde. Bloss kontinuierliche Bogen, sowie Bogen, die mit Balken versteift sind, machen hiervon eine Ausnahme.

Bogenträger mit 3 Gelenken sind statisch bestimmt. Die Auflagerdrücke lassen sich ohne Rücksicht auf elastische Formänderungen berechnen. Denn ein Seilpolygon mit gegebenen Belastungen kann stets eindeutig durch drei Punkte geführt werden; die Drucklinie lässt sich demnach in diesem Falle auf Grund der Gleichgewichtsgesetze zeichnen, während man bei weniger als 3 Gelenken noch die Gesetze der elastischen Formänderungen zu Hilfe ziehen muss.

Dass Bogen mit 3 Gelenken statisch bestimmt sind, erkennt man auch durch Abzählen der Knotenpunkte, Stäbe und Auflagerbahnen. Der durch die Fig. 1 dargestellte Bogen besitzt z. B. 17 Knotenpunkte, 30 Stäbe und 2 feste Auflager, d. h. 4 Auflagerbahnen; es ist daher $2k = s + a$. (Vgl. Teil II, S. 5.)

Die 3 Gelenke liegen in der Regel im Scheitel und in den beiden Kämpfern, doch lassen sich die nachfolgend beschriebenen Rechnungsverfahren in der Hauptsache auch auf Bogen anwenden, bei denen die Gelenke beliebig liegen. Bei zweigelenkigen Bogen befinden sich die Gelenke gewöhnlich an den Kämpfern, bei eingelenkigen liegt das Gelenk im Scheitel; doch auch hier wird durch abweichende Lage des Gelenkes die statische Berechnung in ihren Grundzügen nicht geändert.

Man unterscheidet ferner fachwerkförmige (gegliederte) und vollwandige Bogenträger. In vorliegendem Buche werden hauptsächlich die ersteren behandelt, da sie häufiger gebaut werden und ihre Berechnung durchsichtiger ist. Doch werden wir jeweilen auch die vollwandigen Träger, so weit erforderlich, besprechen. Manche Bogenträger gehören teils in die eine, teils in die andere Klasse, sie sind halb fachwerkförmig, halb vollwandig gebaut. Bei diesen hat man die Rechnungsverfahren der beiden Arten gleichzeitig anzuwenden.

Die Figuren 1 und 14 stellen die beiden Formen von Fachwerkbogen dar, die am häufigsten vorkommen. Bei der einen ist

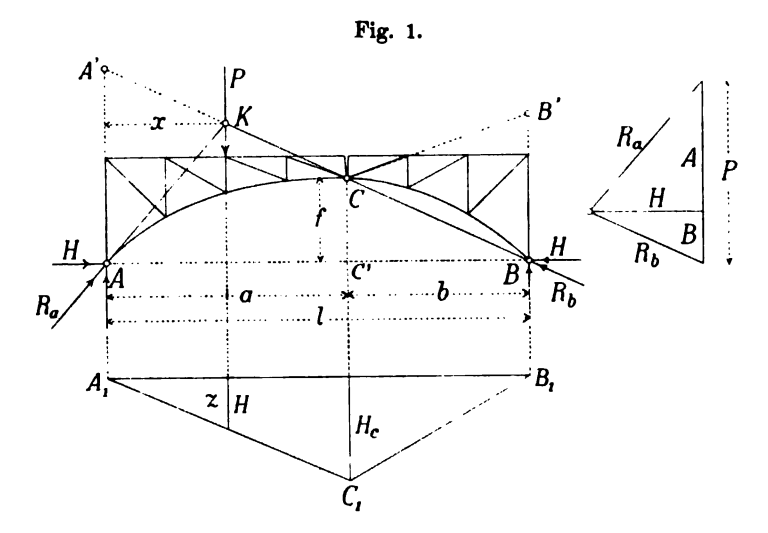
der Obergurt geradlinig (Bogen mit versteiften Zwickeln), bei der andern Form gekrümmt. Bei der Beschreibung der statischen Berechnung stellen wir je nach Umständen bald die eine, bald die andere Form in den Vordergrund; wo es nötig ist, sollen aber beide berücksichtigt werden.

2. Horizontalschub für Einzellasten.

Der Bogen der Fig. 1 werde durch eine einzelne Last P beansprucht. Zieht man die Linien BCK und AK, so stellt AKB die entsprechende Drucklinie dar; denn für die Last P lässt sich kein anderes Seileck zeichnen, das durch die 3 Gelenke ginge.

Trägt man, Fig. 1 rechts, die Last P als Kraft auf und zieht durch ihre Endpunkte Parallele zu AK und BK, so bekommt

Fig. 1.



man das dem Seileck entsprechende Krafteck; R_a und R_b sind die Auflager- oder Kämpferdrücke, die mit P im Gleichgewicht stehen.

Wir zerlegen R_a in zwei Teilkräfte, eine lotrechte A und eine wagrechte H; ebenso zerlegen wir R_b in B und H. Dann sind die beiden Kräfte H gleichgross und heben sich auf, folglich stehen auch die Kräfte P, A und B im Gleichgewicht. Hieraus folgt, dass die Kräfte A und B, d. h. die lotrechten Komponenten der Auflagerdrücke, auch erhalten werden, wenn man den Bogen als einen einfachen Balken betrachtet, der in A und B frei aufruht.

Die Kraft H wird „Bogenschub" oder „Horizontalschub" genannt. Aus einfachen geometrischen Gründen folgt, dass das Dreieck $AA'K$ dem Kraftdreieck $PR_a R_b$ ähnlich ist, weil die Seiten paarweise parallel laufen. Bezeichnet man nun die Entfernung des Punktes K von der Auflagerlinie mit x, so verhält sich

$$AA' : x = P : H.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $AA'B$ und $C'CB$ folgt ferner

$$AA' : f = l : b.$$

Somit ist der wagrechte Bogenschub

$$H = \frac{P \,.\, b \,.\, x}{f \,.\, l} \,.$$

Man sieht hieraus, dass der Bogenschub der Entfernung der Last vom Auflager A proportional ist.

Gelangt die Last an den Scheitelpunkt C, so nimmt die Drucklinie die Form ACB an, und es wird $x = a$, somit

$$H_c = \frac{P a b}{f l} \,.$$

Dieser Wert wird auch erhalten, wenn man das Dreieck ACB als die Momentenfläche für eine über C stehende Last ansieht. Denn das Biegungsmoment in C ist nach der Balkentheorie einerseits gleich $\frac{P \,.\, a \,.\, b}{l}$ und anderseits gleich $H \,.\, f$.

Überschreitet die Last P das Scheitelgelenk, so gelten dieselben Ausdrücke, nur hat man AA' mit BB' und b mit a zu vertauschen, und x bedeutet jetzt die Entfernung der Last vom rechten Auflager. Der Ausdruck für H_c bleibt der nämliche.

Liegt das Scheitelgelenk in der Mitte der Spannweite, so wird $a = b = \frac{1}{2} l$ und demnach

$$H_c = \frac{P \,.\, l}{4 f} \,.$$

Trägt man den Bogenschub für verschiedene Stellungen der Last unterhalb dieser als lotrechte Ordinate auf, so liegen die Endpunkte der Ordinaten auf zwei schiefen geraden Linien, und man erhält das Dreieck $A_1 C_1 B_1$. Dieses Dreieck ist somit die „Einflussfläche" für den Bogenschub, die sogenannte „H-Fläche". (Vgl. Teil III, S. 264.)

Dass die Einflusslinie für den Horizontalschub ein Dreieck mit der Spitze unterhalb C ist, lässt sich auch mit Hilfe der Betrachtungen über

die virtuelle Arbeit nachweisen. Verleiht man den Auflagern eine unendlich kleine, wagrechte Bewegung nach innen, so hebt sich die Fahrbahngurtung und nimmt dabei die Form einer in C geknickten Linie an. Da die angreifenden Kräfte im Gleichgewicht stehen, so ist die bei dieser Bewegung von den Kräften verrichtete Arbeit gleich null. Verschiebt sich beispielsweise der Punkt A in der Richtung AB um Δa, der Punkt B um Δb und der Scheitel C um Δc, so ist $H\,(\Delta a + \Delta b) - P.\Delta c = 0$. Da die Linien AC und BC hierbei ihre Länge beibehalten, so folgt aus geometrischen Gründen $\Delta a : \Delta c = f : a$ und $\Delta b : \Delta c = f : b$. Folglich wird wie oben

$$H_c = \frac{P\,a\,b}{f\,l}.$$

In der Folge machen wir die Höhe des Dreieckes $A_1\,C_1\,B_1$ in der Regel nicht gleich H_c, sondern, was für spätere Zwecke geeigneter ist, gleich der Länge $\frac{a.b}{l}$ (Fig. 2). Nennt man dann die Ordinate des Dreieckes senkrecht unter der Last z, so verhält sich $z : \frac{a\,b}{l} = x : a$, woraus schliesslich folgt

$$H = \frac{P.z}{f}.$$

Der Horizontalschub für eine Reihe von Lasten wird jetzt gefunden, wenn man die Ordinaten lotrecht unter sämtlichen Lasten summiert und die Summe einsetzt in den Ausdruck

$$H = \frac{P.\Sigma(z)}{f}.$$

Sind die Lasten verschieden gross, so wählt man eine beliebige Last P_0 als Grund- oder Normallast und verwendet für die Lasten von abweichender Grösse Verwandlungswinkel. (Vgl. Teil III, S. 83.) Oder man misst die z mit dem Massstab, schreibt ihre Längen auf, multipliziert jede von ihnen rechnerisch mit ihrem P und addiert die Produkte.

Die Einflussfläche für den Horizontalschub hat dieselbe Gestalt, wie diejenige für das Biegungsmoment eines einfachen Balkens. Die ungünstigste Laststellung für den Horizontalschub ist daher die nämliche, wie die für das Biegungsmoment eines Balkens, d. h. die Laststellung im Punkte C. Es gilt daher wie dort der Satz: H wird ein Maximum, wenn die ganze Öffnung mit Lasten bedeckt ist; eine Last muss stets über dem Scheitel stehen. Um die ungünstigste Stellung der Lasten zu finden, kann man daher auch so vorgehen,

dass man, wie bei einem gewöhnlichen Balkenträger, für die gegebene Lastenreihe ein Seileck zeichnet und die Schlusslinie so lange verschiebt, bis man unter C die grösste Momentenordinate gefunden hat.

Bei **gleichförmig verteilter Belastung** tritt in obiger Formel für H an Stelle von $\Sigma(z)$ der Inhalt des Dreieckes $A_1\,C_1\,B_1$, d. h. $l.\frac{a\,b}{2\,l} = \frac{a\,b}{2}$. Es ist demnach der Horizontalschub, wenn p die Last auf die Längeneinheit bezeichnet, gleich dem Flächeninhalte der Einflussfläche multipliziert mit $\frac{p}{f}$, also

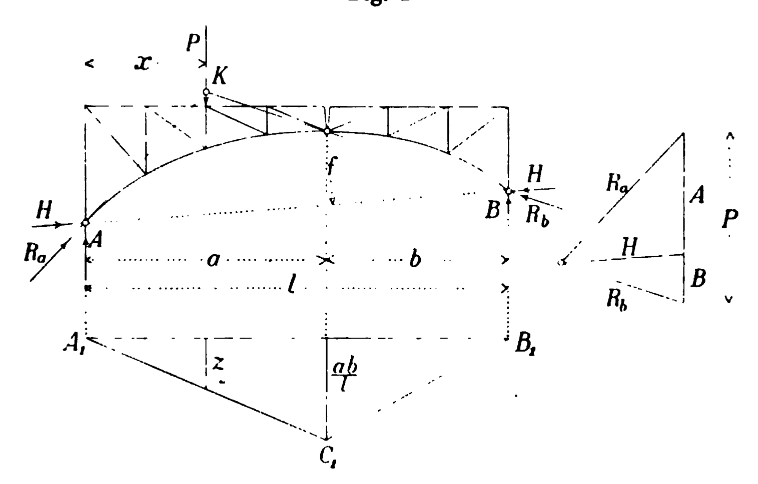
$$H = \frac{p\,.\,a\,.\,b}{2\,f},$$

oder für symmetrische Anordnung

$$H = \frac{p\,.\,l^2}{8\,f}.$$

Bewegt sich die Last P von einem Auflager zum andern, so beschreibt der Punkt K, in welchem sich die beiden Kämpferdrücke schneiden, den Linienzug $A'\,C\,B'$ (Fig. 1). Man nennt diese Linie die „**Kämpferdrucklinie**“.

Fig. 2.



Liegen die Stützpunkte des Bogens nicht auf einer Wagrechten, d. h. ist der Bogenschub **schief** gerichtet (Fig. 2), so gelten die oben für gleichhohe Auflager abgeleiteten Gesetze und Formeln auch

in diesem Falle. Es ist wie früher der Schub für eine Einzellast

$$H = \frac{P b x}{f l}$$

und für eine über C stehende Last

$$H_c = \frac{P a b}{f l}.$$

Macht man ferner die Höhe der Einflussfläche gleich $\frac{a . b}{l}$, so ist der Bogenschub

$$H = \frac{P . z}{f},$$

worin z die vertikal gemessene Höhe der Einflussfläche bedeutet. Kurz, es gelten die nämlichen Ausdrücke wie früher, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Pfeilhöhe des Bogens nicht lotrecht, sondern senkrecht zur Linie $A B$ gemessen werden muss.

3. Einfluss des Eigengewichtes.

Um den Einfluss des Eigengewichtes auf die Stabkräfte eines Bogens mit 3 Gelenken zu finden, zeichnet man am besten die Drucklinie für Eigengewicht und bestimmt hierauf sämtliche Stabkräfte mittels eines Cremona'schen Kräfteplanes. Die Drucklinie muss so gezeichnet werden, dass sie durch die 3 Gelenkpunkte geht. Bei symmetrischer Anordnung des Bogens (Fig. 3) kann die Arbeit auf die Hälfte beschränkt werden.

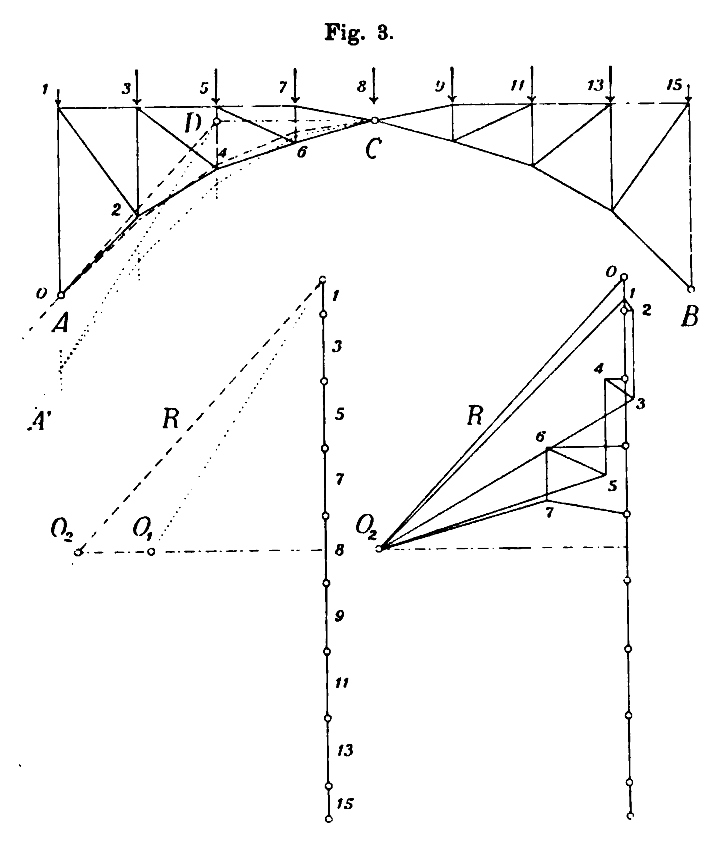
Man trägt (Fig. 3 links unten) die 9 Eigengewichtslasten 1, 3, 5 u. s. w. als Krafteck auf und wählt der Mitte von 8 gegenüber einen beliebigen Punkt O_1 als Pol. Mit diesem Pole zeichnet man, in C beginnend, das Seileck $C A'$. Das ist natürlich nicht das richtige Seileck, da seine letzte Seite nicht durch den Auflagerpunkt A geht. Um dieses zu finden, verlängert man die letzte Seilseite rückwärts nach rechts, bis sie die Wagrechte durch C in D schneidet, und verbindet D mit dem Auflager A. Sodann zieht man durch den Anfangspunkt des Kraftecks eine Parallele zu dieser Verbindungslinie und findet hiermit den richtigen Pol O_2 und zugleich den Auflagerdruck R.

Von der Kraft R ausgehend zeichnet man jetzt (Fig. 3 rechts) einen Cremona'schen Plan, der sich über sämtliche Stäbe zwischen A und C erstreckt. Eine nähere Erklärung dieser Arbeit dürfte

unnötig sein. Die Nummerierung der Stabkräfte ist die bei uns übliche: die Strebenkräfte sind durch die Nummern ihrer Endpunkte bezeichnet, die Gurtungskräfte durch die Nummern ihrer Drehpunkte.

Hat der Bogen unsymmetrische Gestalt, so muss die Zeichnung über die ganze Spannweite ausgedehnt werden. Das Verfahren

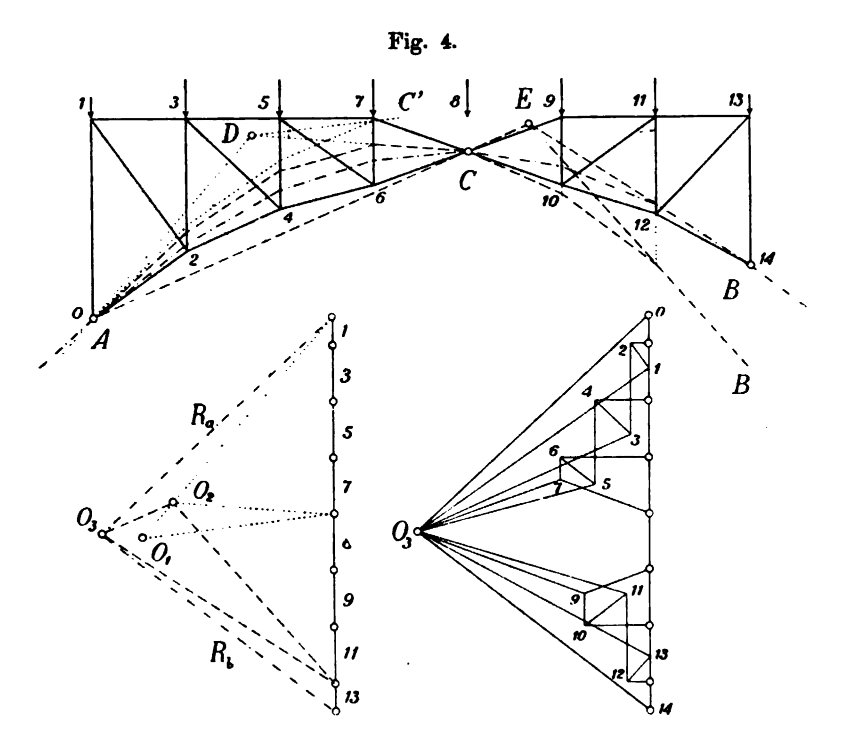
Fig. 3.



ist das nämliche, das man anwendet, um ein Seilpolygon durch drei gegebene Punkte zu führen. Man trägt wieder (Fig. 4 unten links) die Eigengewichtslasten zu einem Kraftecк auf und wählt einen beliebigen Punkt O_1 als Pol. Hierzu zeichnet man, von A ausgehend, das Seileck AC'. Die letzte Seite verlängert man rückwärts bis zum Schnittpunkt D mit der ersten Seite und verbindet D mit C. Zieht man dann im Krafteck durch den Punkt 7 8 eine Parallele zu dieser Verbindungslinie, so schneidet diese auf der Verlängerung des ersten Strahles den Pol O_2 ab. Mit diesem Pole

setzt man das Seileck von C aus fort bis B'. Dann verlängert man die letzte Seite rückwärts bis zum Schnittpunkte E mit der Linie AC, verbindet E mit B und zieht durch den Punkt 11 13 des Kraftecken eine Parallele zur Verbindungslinie; dann schneidet diese auf einer Parallelen zu AC den endgültigen Pol O_3 ab, womit die beiden Auflagerdrücke R_a und R_b bestimmt sind. Zur Sicherheit zeichnet man noch die richtige Drucklinie ein; sie muss, wenn genau gearbeitet wurde, durch A, C und B gehen.

Fig. 4.



Nun zeichnet man wie oben einen Cremona-Plan (Fig. 4 rechts), der sämtliche Stabkräfte enthält. Man beginnt am besten sowohl am linken, wie am rechten Auflager und schreitet von beiden Seiten gegen die Mitte vor, wo sich einfache Proben für die Richtigkeit der Zeichnung ergeben. —

Bei kleineren und mittleren Spannweiten darf man das Eigengewicht in der Regel als gleichförmig verteilt ansehen, bei grösseren jedoch empfiehlt es sich, dasselbe für jeden Pfosten besonders zu berechnen.

Die unteren Knotenpunkte sieht man gewöhnlich als unbelastet an; das Hauptgewicht ruht ja in der Regel auf den oberen Knotenpunkten. Will man auch die unteren Punkte als belastet ansehen, so werden die Pfosten dadurch noch auf Zug beansprucht.

Wird das Eigengewicht gleichförmig verteilt angenommen, und ist der Bogen symmetrisch gebaut, so kann man den Horizontalschub auch durch Rechnung bestimmen nach der Formel $H = \frac{g \cdot l^2}{8f}$. ($g$ = Belastung pro Längeneinheit.)

Liegt dabei das Gelenk genau in der untern Gurtung und folgt diese einer Parabel, so fällt die Drucklinie mit der untern Gurtung der ganzen Länge nach zusammen. Die Bestimmung der Stabkräfte vereinfacht sich in diesem Falle. Zieht man nämlich durch die Punkte des Kraftecks Parallele zu den untern Gurtstäben, so schneiden sich alle im Pole O des Kraftecks; die Strahlen aus O stellen die in der untern Gurtung wirkenden Kräfte dar, in den Pfosten wirken die einzelnen Knotenlasten, Obergurt und schiefe Streben gehen leer aus.

Das Zeichnen der Cremona'schen Kräftepläne wird leicht ungenau, weil zu den verhältnismässig kurzen Gurtungsstäben lange Parallellinien gezogen werden müssen. Dieser Übelstand lässt sich jedoch, wenn nicht beseitigen, so doch folgendermassen wesentlich mildern.

Folgt die Gurtung einer Parabel (Fig. 5), so sind, gleiche Pfostenab-

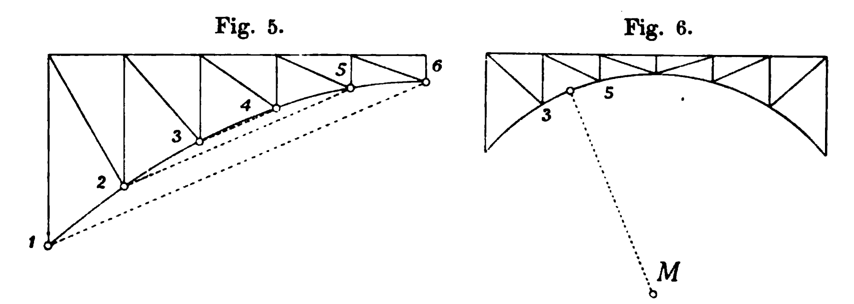


Fig. 5. Fig. 6.

abstände vorausgesetzt, die Sehnen 2 5, 1 6 u. s. w. dem Gurtstabe 3 4 parallel; es steht einem daher für die Richtung des Stabes 3 4 ein guter und meist genügender Ersatz zur Verfügung. Eine noch grössere Genauigkeit erzielt man, wenn man die Gurtung als ein Seileck für gleichförmig verteilte Belastung ansieht und das entsprechende Krafteck dazu zeichnet.

Folgt die Gurtung einem Kreise (Fig. 6), so verbindet man die Mitte jedes Gurtstabes mit dem Kreismittelpunkte M und zieht die zum Stabe parallele Linie senkrecht zum Halbmesser aus M.

Folgt die Gurtung weder einer Parabel noch einem Kreise, sondern

einer unregelmässigen Linie, so wird man in der Regel schon mit Rücksicht auf die Ausführung des Bogens die Koordinaten sämtlicher Knotenpunkte genau berechnen. Ist das geschehen, so lassen sich die einzelnen Gurtstäbe leicht in grösserem Massstabe auftragen, womit die gewünschte grössere Genauigkeit beim Ziehen der Parallelen ebenfalls erreicht wird.

Abgesehen von diesen Hilfsmitteln ist es stets ratsam, beim Zeichnen grösserer Cremona-Pläne einzelne Kräfte durch Rechnung nach dem Momentenverfahren zu bestimmen und die gezeichneten Werte damit zu vergleichen; am besten eignen sich hierzu die Gurtstäbe.

4. Einflusslinien für die Stabkräfte; erstes Verfahren.

Um den Einfluss der zufälligen Belastung auf die einzelnen Stäbe zu ermitteln, wendet man am besten Einflusslinien an. (Vgl. Teil III, S. 264.) Das frühere, von Culmann eingeführte Rechnungsverfahren, das darin besteht, dass die über den Knotenpunkten aufgestellten Lasten einzeln zerlegt und die Resultierenden gruppenweise zusammengefügt werden, mag rascher zum Ziele führen, ist aber weniger übersichtlich und verlangt grössere Aufmerksamkeit; besteht die zufällige Belastung aus unregelmässigen Einzellasten, so wird das ältere Verfahren sogar unbrauchbar. (Vgl. übrigens Nr. 28 und 64, wo das ältere Verfahren für Bogen mit 2 und mit 0 Gelenken erläutert ist.)

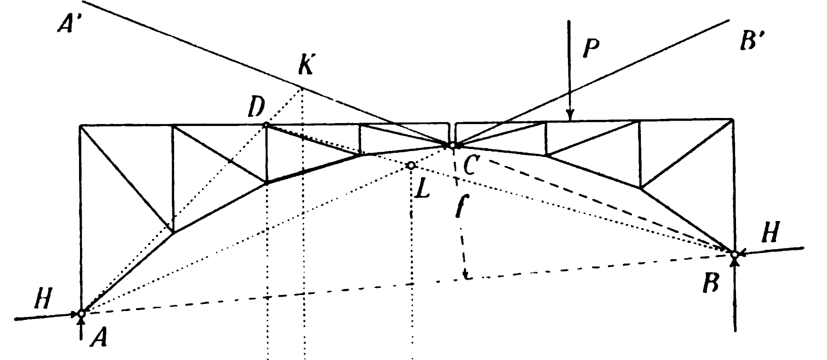
Man kann bei der Berechnung der Stabkräfte mittels Einflusslinien zwei verschiedene Wege einschlagen. Bei dem einen geht man von dem Dreiecke $A_1 C_1 B_1$ aus und macht dessen Höhe für alle Stäbe gleichgross; der Kräftemassstab ist in diesem Falle von Stab zu Stab verschieden. Beim zweiten Verfahren (Nr. 5) werden die Einflussflächen durch Auftragen von Kräften gezeichnet, wobei ein konstanter Kräftemassstab gewählt wird. Das letztere Verfahren ist fasslicher, das erstere dagegen kürzer. Wir besprechen zunächst das erstere Verfahren.

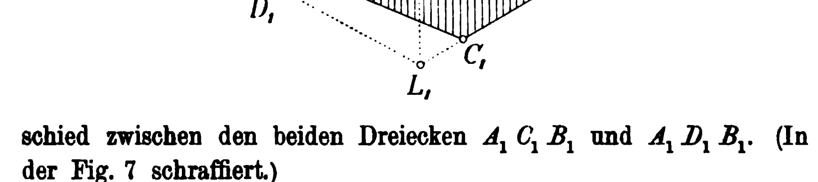
Die Einflusslinie für einen Stab, beispielsweise für den dritten untern Gurtstab in der Fig. 7, setzt sich aus zwei Teilen zusammen; der eine Teil rührt von der wagrechten Kraft H, der andre von den lotrechten Kräften A, B und P her. Die Einflussfläche für H wird, wie in der Nummer 2 gezeigt wurde, durch ein Dreieck $A_1 C_1 B_1$ dargestellt, dessen Spitze unter dem Scheitelgelenk C liegt. Die Einflussfläche für die lotrechten Kräfte ist ebenfalls ein Dreieck; seine Grundlinie ist $A_1 B_1$, und seine Spitze D_1

liegt lotrecht unter dem Drehpunkte D des betreffenden Stabes. Es ist dieselbe Fläche, die man erhält, wenn man den Bogen als einen fachwerkförmigen Balken betrachtet. (Vgl. Teil III, S. 265—270, Fig. 15.)

Da die Kräfte H und P entgegengesetzte Biegungsmomente hervorrufen, so müssen die beiden Einzelflächen voneinander abgezogen werden. Die wirkliche Einflussfläche ist somit der Unter-

Fig. 7.





schied zwischen den beiden Dreiecken $A_1\,C_1\,B_1$ und $A_1\,D_1\,B_1$. (In der Fig. 7 schraffiert.)

Um die Höhe des Dreieckes $A_1\,D_1\,B_1$ zu finden, bestimmen wir den Punkt K_1, in welchem die Einflussfläche, d. h. die Stabkraft null ist. Zu diesem Zwecke verbinden wir den Drehpunkt D des Stabes mit dem Auflagerpunkte A, bringen die Verbindungslinie mit der Kämpferdrucklinie $A'\,C\,B'$ zum Schnitt und loten den Schnittpunkt K herunter. Auf diese Weise erhalten wir den gesuchten Punkt K_1; denn wenn die Last in K aufgelegt wird, so zerlegt sie sich in die beiden Richtungen $K\,A$ und $K\,B$; die Linie $K\,A$ ist

aber die Richtung des linksseitigen Kämpferdruckes und da sie durch den Drehpunkt D des Gurtungsstabes geht, ist die Stabkraft in diesem Falle null.

Die Regel zur Konstruktion der Einflussfläche lautet daher einfach: Man verbinde (Fig. 7) den Drehpunkt des zu berechnenden Stabes mit A, schneide die Kämpferdrucklinie an, lote den Schnittpunkt herunter nach K_1 und ziehe die Linien $B_1 K_1 D_1$ und $A_1 D_1$.

Man gelangt auf die nämliche Figur, wenn man die linke Seite des Bogens mit der rechten vertauscht: Man verbindet den Drehpunkt D mit B, schneidet die Kämpferdrucklinie $B' C$ an, lotet den Schnittpunkt L herunter nach L_1 und zieht die Linien $A_1 L_1$ und $B_1 D_1$. Dieser zweite Weg mag in manchen Fällen als willkommene Kontrolle dienen.

Die Einflussfläche besteht aus zwei Teilen mit entgegengesetzten Zeichen; der linke Teil $(A_1 D_1 K_1)$ ist die Zugfläche, der rechte $(K_1 C_1 B_1)$ die Druckfläche. Um dies zu erkennen, beachte man, dass der Horizontalschub in den untern Gurtstäben stets Druck erzeugt; die Flächenteile oberhalb der Linien $A_1 C_1 B_1$ ergeben somit Druckspannungen (D), diejenigen unterhalb Zugspannungen (Z).

In derselben Weise werden die Einflussflächen für obere Gurtstäbe gezeichnet.

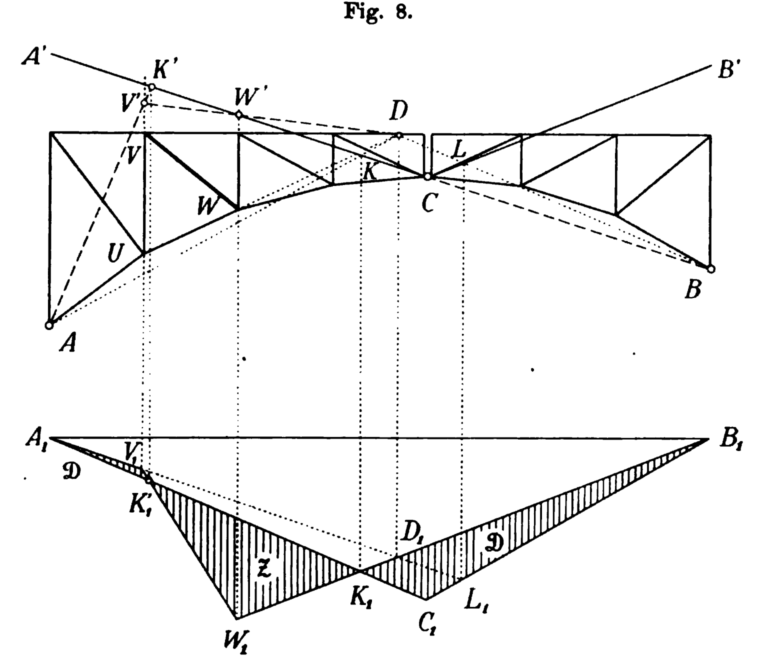
Handelt es sich um eine Strebe, beispielsweise um den Stab $V W$ (Fig. 8), so nimmt die Einflussfläche für die lotrechten Kräfte viereckige Gestalt an. Die Punkte V_1 und W_1 liegen lotrecht unter den Endpunkten der Strebe und die Linien $A_1 V_1$ und $B_1 W_1$ schneiden sich wie bei den Gurtungen lotrecht unter dem Drehpunkte D der Strebe. (Vgl. Teil III, S. 266.) Die Regel lautet hier: Man verbinde A mit dem Drehpunkte D des Stabes, schneide die Linie $A' C$ an und lote den Schnittpunkt K herunter nach K_1; dann ziehe man $B_1 K_1 W_1$, lote D nach D_1 herunter und ziehe $A_1 V_1 D_1$. Man erreicht denselben Zweck, wenn man links mit rechts vertauscht: Man verbinde D mit B, schneide die Linie $B' C$ in L, lote herunter nach L_1 und ziehe $A_1 V_1 L_1$; dann lote man D nach D_1 herunter und ziehe $B_1 D_1 W_1$.

Auch der Punkt K_1', in welchem die Einflussfläche zum zweiten Male null wird, lässt sich leicht bestimmen: Man ziehe $D W' V'$ und $A V' K'$, dann liegt der Punkt K_1' lotrecht unter K'; denn wenn man im Punkte K' eine Einzellast auflegt, so zerlegt sie sich zunächst in zwei Einzelkräfte, die in den Pfosten unter V' und

W' wirken, und diese erzeugen die Auflagerdrücke AK' und BK. die Drucklinie nimmt nämlich jetzt den Verlauf $AV'W'B$ an. Für die Strebe VW ist die in $V'W'$ liegende Kraft massgebend und da diese durch den Drehpunkt der Strebe geht, so ist die Strebenkraft in diesem Falle null. Man wählt von den drei verschiedenen Verfahren die am bequemsten liegenden und verwendet das dritte eventuell als Probe.

Die Drehpunkte der Streben liegen vielfach stark abseits, so

Fig. 8.



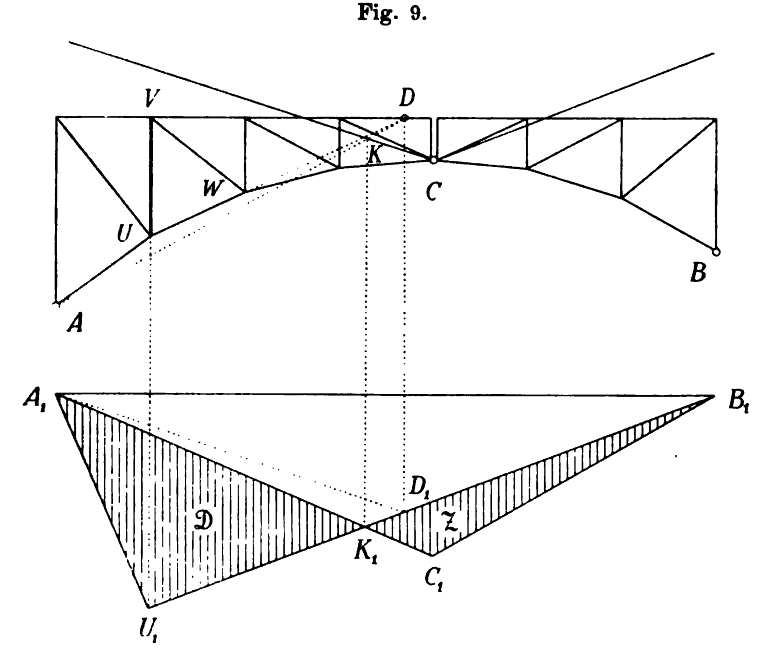
dass das Herunterloten nach D_1 unbequem und ungenau wird. In diesem Falle ist es vorzuziehen, die Punkte K_1 und K_1' zu bestimmen und das Übereinstimmen von D und D_1 bloss als Kontrolle zu verwerten. Selbst wenn der Drehpunkt über den Rand des Zeichnungsblattes hinausfällt, lässt sich in der Regel die Bestimmung der Nullpunkte K_1 und K_1' mit genügender Genauigkeit ausführen. (Vgl. übrigens die folgende Nummer.)

In der Fig. 8 besteht die Einflussfläche aus drei Teilen, einer Zug- und zwei Druckflächen (mit Z und D bezeichnet). Eine über die ganze Öffnung wandernde Einzellast ruft daher in der Strebe VW zuerst Druck, dann Zug und dann wieder Druck hervor; die

Einflussfläche ist dreiteilig. Dies ist indessen nur der Fall, solange der Drehpunkt D oberhalb der Kämpferdrucklinie liegt; befindet sich D unterhalb der Linie CB', so kommt der Nullpunkt K_1 in Wegfall und die Einflussfläche wird wieder zweiteilig.

Die Fig. 9 erläutert schliesslich das Verfahren für den Pfosten UV. Vorausgesetzt, dass die obere Gurtung geradlinig verläuft, ist der Drehpunkt dieses Stabes der nämliche wie für die Strebe VW (Fig. 8); die Einflussfläche unterscheidet sich von jener nur dadurch,

Fig. 9.



dass die Übergangslinie $V_1 W'_1$ sich um ein Feld nach links verschiebt. Man beachte, dass die Endpunkte dieser Übergangslinie, also V_1 und W'_1, stets lotrecht unter denjenigen Knotenpunkten des Obergurtes liegen, die durch den das Füllungsglied treffenden Schnitt getrennt werden. —

Nachdem die Form der Einflussflächen bestimmt ist, fragt es sich, in welchem Massstabe die Ordinaten derselben zu messen sind. Wir schlagen hierzu folgenden Weg ein.

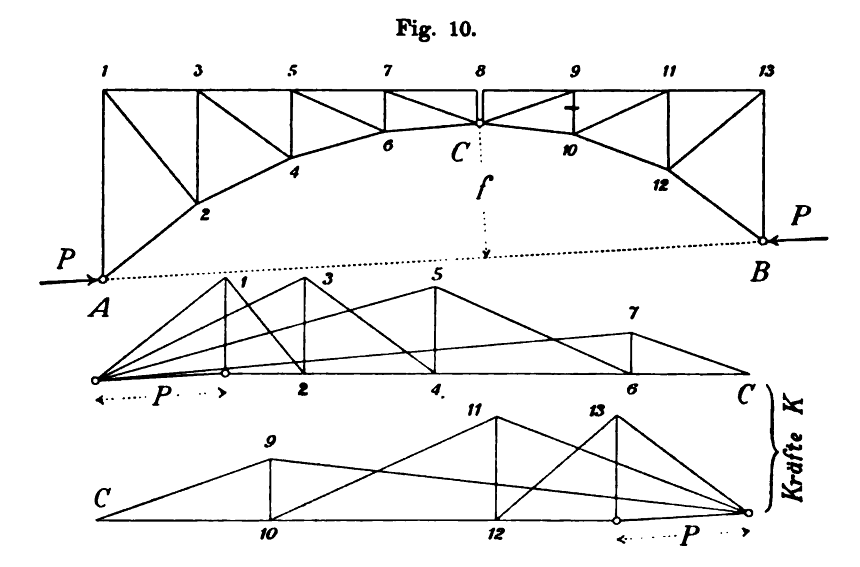
Zunächst zeichnen wir das Dreieck $A_1 C_1 B_1$ mit der Höhe $\frac{a \cdot b}{l}$, oder bei symmetrischer Anordnung des Bogens mit der Höhe $1/4\, l$.

Dann ist der Horizontalschub, wenn man die Ordinaten des Dreieckes mit z bezeichnet,

$$H = \frac{P.z}{f}.$$

(Vgl. S. 5.) Sodann denken wir uns, die Last P greife als Bogenschub in A und B an und zeichnen hierfür zwei Cremona'sche Kräftepläne, den einen für die linke, den andern für die rechte Bogenhälfte (Fig. 10 unten). Bei symmetrischer Bogenform kann

Fig. 10.



man sich selbstverständlich mit einem dieser Pläne begnügen. Die Nummernbezeichnung ist unschwer zu verstehen: die Gurtkräfte tragen an ihren Enden die Nummern ihres Drehpunktes, die Strebenkräfte die Nummern ihrer Endpunkte.

Nennt man nun die Kräfte dieser Cremona-Pläne K und die Stabkräfte, die unter dem Einfluss von H entstehen, S, so verhält sich

$$K : S = P : H,$$

und es ist mit Rücksicht auf obigen Ausdruck für H

$$S = \frac{K.z}{f}.$$

Dies gilt zunächst für die Kraft S, die allein von H herrührt. Misst man aber nicht die Ordinaten der H-Fläche, sondern diejenigen der Einflussfläche, so ist S die Stabkraft, die sich unter der vereinigten Wirkung von H und P ergibt.

Stehen mehrere Lasten auf dem Bogen, so summiert man die entsprechenden z und hat dann die Stabkraft

$$S = \frac{K \cdot \Sigma(z)}{f}.$$

In den beiden Ausdrücken bedeutet f stets die senkrechte Entfernung des Gelenkes von der Bogensehne AB.

Die Kräfte K liefern uns also in einfacher Weise den Massstab für die Einflussfläche. Für jeden Stab ergibt sich nicht nur eine besondere Einflussfläche, sondern auch eine besondere Kraft K. Die Berechnung der Stabkräfte wird jedoch dadurch kaum umständlicher. Am besten schreibt man die gefundenen z, sowie die Kräfte K (den Kräftemassstab) in Tabellenform auf und rechnet die Kräfte S mit dem Rechenschieber aus.

Das Vorzeichen der Stabkraft ergibt sich stets auf folgende Weise: Man betrachtet die Ordinaten der Fläche $A_1 C_1 B_1$ als positiv, diejenigen von $A_1 D_1 B_1$ als negativ. Ferner gibt man der Kraft P in den Cremona-Plänen die Richtung nach innen und findet hieraus den Sinn der Kräfte K. Zum Beispiel werden die K für den Obergurt positiv (Zug), für den Untergurt negativ (Druck). Schreibt man dementsprechend in der Tabelle die Vorzeichen von $\Sigma(z)$ und K ein, so ergibt sich das Vorzeichen von S durch einfache Multiplikation. —

Das hiermit beschriebene Verfahren zur Berechnung der Stabkräfte mag auf den ersten Blick etwas gezwungen erscheinen, gewinnt jedoch durch seine Analogie mit dem für Zweigelenkbogen üblichen Verfahren (Nr. 19) an Wert und bereitet, wenn man sich etwas daran gewöhnt hat, keinerlei Schwierigkeiten. Zu beachten ist, dass die Einflussfläche jetzt ein rein geometrisches Gebilde ist und mit Kräften nichts zu tun hat; die z sind als Linien anzusehen und im gleichen Massstab zu messen, in welchem die Pfeilhöhe f und die Stablängen aufgetragen wurden.

Da grössere Cremona-Pläne leicht zu Ungenauigkeiten führen, ist es ratsam, je die letzte K-Kraft, in unserem Beispiel Fig. 10 also die Kräfte $6C$ und $C10$, noch durch Rechnung nach dem Momentensatze zu bestimmen und das Ergebnis mit der Zeichnung zu vergleichen.

Die Kräfte in den Stäben 7 8 und 8 9 (Fig. 10) sind stets null. In den Mittelpföstchen $8C$ wirken die im Punkte 8 angreifenden Lasten.

Eine eigentümliche Stellung nimmt der Stab 7 *C* ein; er kann ebensogut als Gurtungsstab, wie als Strebe angesehen werden, da die Stäbe 7 8 und 8 *C* entfernt werden dürfen, ohne dass das Stabgebilde dadurch beeinflusst wird. Bei näherem Zusehen zeigt es sich, dass man, abgesehen vom Massstabe, stets auf dieselbe Einflussfläche gelangt, gleichgültig, ob man den Drehpunkt des Stabes 7 *C* im Punkte 6, oder im Schnittpunkte der Stäbe 7 8 und 6 *C* annimmt. Sogar jeder andere Punkt auf der Linie 6 *C* kann als Drehpunkt gewählt werden; das Schlussergebnis bleibt stets das nämliche. Man macht sich diesen Umstand dadurch zu Nutze, dass man denjenigen Punkt wählt, der die bequemsten und genausten Figuren liefert.

Da beim Zeichnen der Einflussflächen das Dreieck $A_1\,C_1\,B_1$ stets das nämliche bleibt, so ist es möglich, verschiedene Fälle in ein und derselben Figur zu vereinigen. Bei einiger Aufmerksamkeit, und wenn der Bogen nicht zu viele Stäbe besitzt, kann man die ganze Arbeit auf vier Figuren beschränken, die eine umfasst sämtliche Untergurtstäbe, die zweite alle Obergurtstäbe, die dritte alle Streben und die vierte die Pfosten. —

Wie man die Einflussflächen benutzt, um die grössten und kleinsten Stabkräfte zu finden, ist im dritten Teile dieses Werkes ausführlich erklärt worden. (Man vergleiche die Nummern 27, 29, 30, 38, 58 und andere.) Besteht die zufällige Last aus einer unregelmässigen Reihe von Einzellasten (Eisenbahnbrücke), so zeichnet man die Laststellung mit lotrechten Strichen auf einen Streifen Pauspapier, schiebt diesen über die Einflussfläche und ermittelt durch Probieren die grösste Ordinatensumme. Für P wählt man die am häufigsten vorkommende Last, z. B. das Gewicht eines Lokomotivtriebrades. Sind die Radgewichte ungleich, so verwendet man für die von P abweichenden Lasten Verwandlungswinkel. (Vgl. Teil III, S. 83.)

Bei gleichförmig verteilter Belastung (Strassenbrücke) macht man die Last P gleich der auf einen Pfosten treffenden zufälligen Last und summiert die Ordinaten z unter jedem Pfosten; oder man misst den Inhalt der Einflussfläche mit einem Planimeter und multipliziert ihn mit $\frac{p}{f}$.

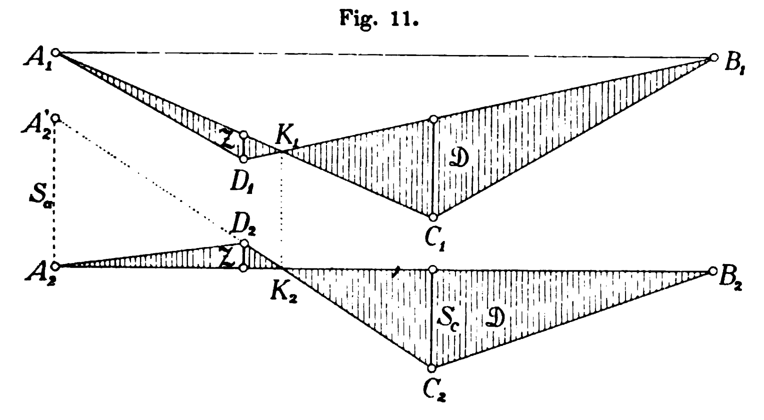
In derselben Weise könnte man auch den Einfluss des Eigengewichtes bestimmen. Doch erreicht man den Zweck in der Regel

schneller und sicherer, wenn man, wie es in der vorigen Nummer beschrieben worden, die Drucklinie für Eigengewicht zeichnet und die Stabkräfte mittels eines Cremona-Planes bestimmt.

5. Einflusslinien für die Stabkräfte; zweites Verfahren.

Die Entwicklungen der vorigen Nummer haben gezeigt, dass die Einflussfläche für die Gurtstäbe durch den Unterschied zweier Dreiecke $A_1\,C_1\,B_1$ und $A_1\,D_1\,B_1$ (Fig. 7) dargestellt wird. Trägt man die Ordinaten dieser Fläche von einer gemeinschaftlichen Grundlinie aus auf, so ergeben sich (Fig. 11) zwei Dreiecke $A_2\,D_2\,K_2$ und

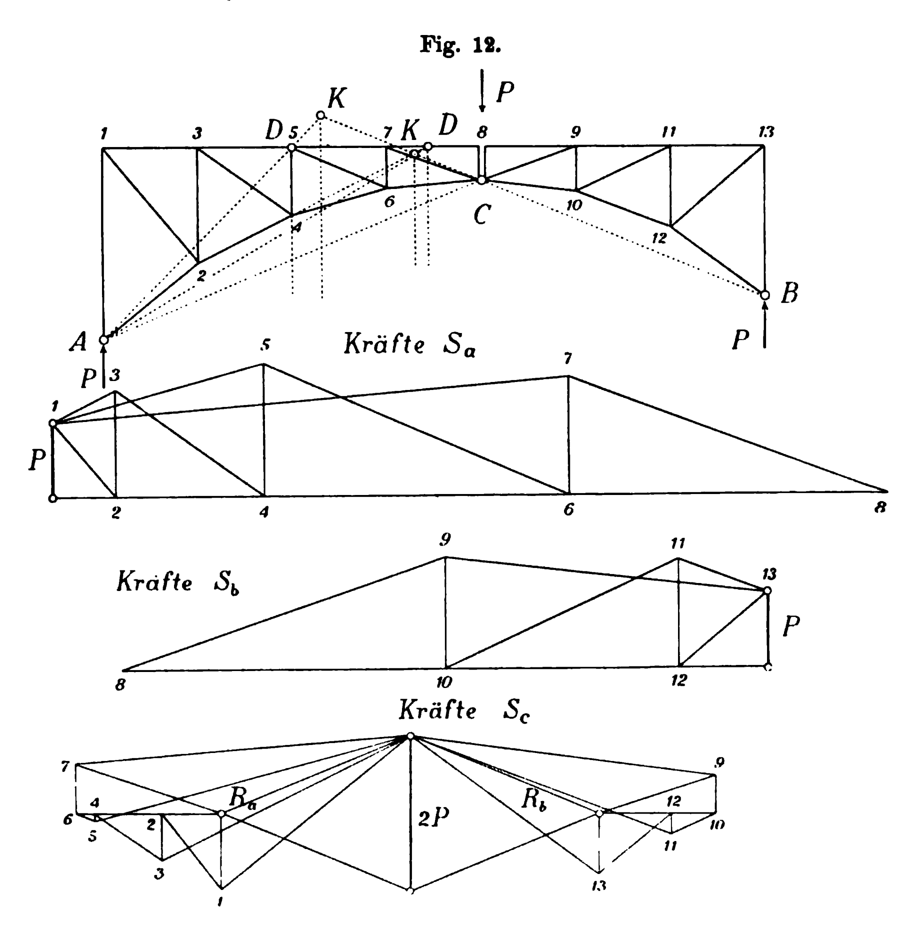
Fig. 11.



$K_2\,C_2\,B_2$. Die Ordinate S_c von C_2 stellt den Einfluss einer im Scheitel des Bogens stehenden Last P dar. Verlängert man ferner die Linie $C_2\,D_2$ bis A'_2, so ist die Ordinate S_a von A_2 der Einfluss der in A wirkenden Last P. Wandert nämlich die Last von C_2 aus nach links, so nimmt ihr Einfluss linear zu, bis zum Punkte D_2; bis dahin ist der Auflagerdruck R_a die einzige links vom Drehpunkte wirkende Kraft. Überschreitet P den Punkt D, so wirken R_a und P gemeinschaftlich, und die Höhe der Einflussfläche nimmt wieder ab. Sieht man jedoch von P ab und betrachtet R_a als die einzige Kraft, so setzt sich die Linie $C_2\,D_2$ einfach fort bis zum Punkte A'_2. Die Ordinate $A_2\,A'_2$ ist daher der Einfluss des Auflagerdruckes für eine in A stehende Last P. Da aber in diesem Falle R_a und P gleichgross sind, so findet man die Kräfte S_a einfach dadurch, dass man in A eine Kraft P in umgekehrter Richtung angreifen lässt.

Man zeichnet demgemäss zwei Cremona'sche Kräftepläne; bei dem einen lässt man die Last P im Auflager A, beim andern im Scheitel angreifen. Wir nennen die Stabkräfte dieser beiden Pläne S_a und S_c. Ist der Bogen unsymmetrisch, so kommt noch ein dritter Plan S_b hinzu und zwar für eine in B angreifende Last. In

Fig. 12.

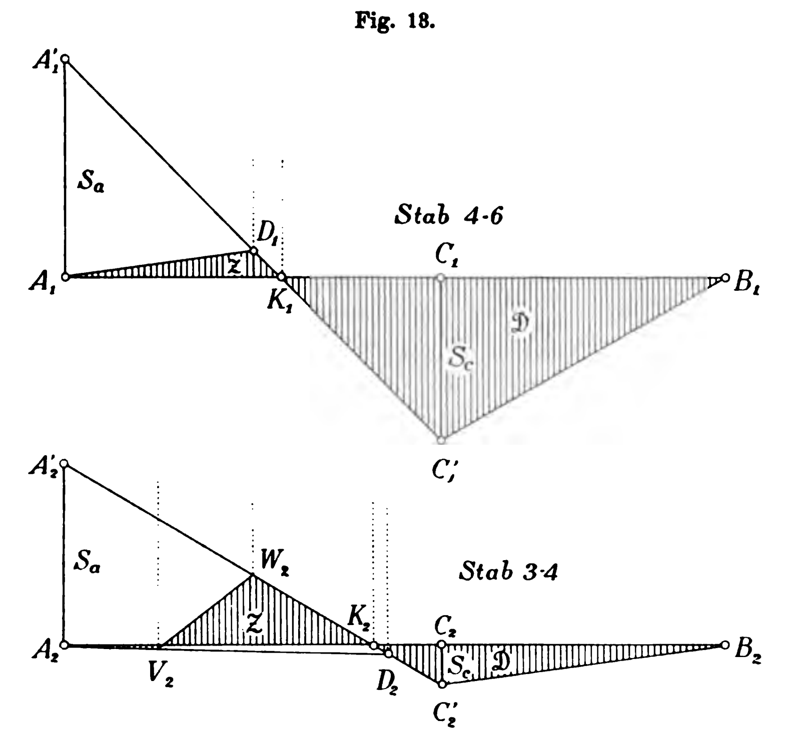


der Figur 12 sind diese Kräftepläne dargestellt; beim ersten wirkt die Last P in A, beim zweiten in B, beim dritten in C. Um grössere Genauigkeit zu erhalten, haben wir den letzten Kräfteplan nicht mit P, sondern mit $2\,P$ gezeichnet; natürlich sind die abgemessenen Stabkräfte dann noch zu halbieren. Die beiden ersten Pläne werden bis zum Scheitelgelenk ausgedehnt, der dritte erstreckt sich über sämtliche Stäbe. Die beiden ersten Pläne sind so einfach, dass eine nähere

Erklärung nicht nötig ist. Beim Plane der Kräfte S_c wird $2P$ zuerst parallel zu AC und BC in R_a und R_b zerlegt; dann beginnt man die Bestimmung der Stabkräfte in üblicher Weise an den beiden Auflagern und schreitet gegen den Scheitel hin vor. Es empfiehlt sich, die Zerlegung der grösseren Übersichtlichkeit halber auf zwei Figuren zu verteilen. Um die Genauigkeit der Arbeit zu prüfen, bestimmt man je die letzte Kraft rechnerisch mittels des Momentensatzes und vergleicht das Ergebnis mit der Zeichnung. Die drei Pläne liefern nun das Material für die Einflussflächen.

Um beispielsweise die Einflussfläche für den Stab 4 6 zu erhalten, trägt man die entsprechenden Kräfte S_a und S_c von A_1 und von C_1 aus lotrecht auf (Fig. 13), zieht die Linien $B_1 C'_1$ und

Fig. 13.



$C'_1 A'_1$. Hierauf lotet man den Drehpunkt D (Knotenpunkt 5) herunter und zieht $A_1 D_1$.

Um die Einflussfläche für die Strebe 3 4 zu erhalten, verfährt man in ähnlicher Weise. Die Kräfte S_a und S_c werden in A_2 und C_2 aufgetragen (Fig. 13). Dann wird C'_2 mit B_2 und A'_2 verbunden,

hierauf der Drehpunkt D der Strebe auf die Linie $A'_2\,C'_2$ heruntergelotet und D_2 mit A_2 verbunden. Endlich ergeben sich durch herunterloten der Strebenendpunkte die Punkte V_2 und W_2.

Ein Vergleich der Figur 13 mit den Figuren 7 und 8 lässt die Übereinstimmung deutlich erkennen; die Form der beiden Einflussflächen ist die nämliche, nur der Massstab ist verschieden. In der nämlichen Weise sind die Pfosten zu behandeln. Für Stäbe rechts vom Scheitel wird an Stelle des ersten Cremona-Planes der zweite benutzt.

Die Vorzeichen der Kräfte S_a, S_b und S_c werden in üblicher Weise bestimmt; bei einiger Aufmerksamkeit kann man nicht im Zweifel sein, ob dieselben nach oben oder nach unten aufzutragen sind. In unsern Figuren sind Zugkräfte stets nach oben, Druckkräfte nach unten aufgetragen; selbstverständlich könnte man es ebensogut umgekehrt halten.

Sehr empfehlenswert ist es, die Zeichnung durch Bestimmung der Nullpunkte K auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Verbindet man (vgl. Fig. 8, S. 13) den Drehpunkt D mit A, so wird die Kämpferdrucklinie lotrecht über K_2 geschnitten. Die Linien $D\,W'\,V'$ und $A\,V'\,K'$ bestimmen ferner den zweiten Nullpunkt. Liegt der Punkt D sehr stark abseits, so benützt man die Bestimmung der Nullpunkte zum Zeichnen der Einflussfläche und verwendet die Übereinstimmung von D und D_2 als Kontrolle, ganz wie beim ersten Verfahren in Nr. 4.

Hinsichtlich der Verwendung der Einflussflächen zur Bestimmung der grössten und kleinsten Stabkräfte gilt das in der vorigen Nummer Gesagte; nur liegen hier die Verhältnisse insofern einfacher, als sämtliche Einflussflächen in dem nämlichen Massstabe gezeichnet sind und die Stabkräfte unmittelbar durch Addition der Ordinaten z gefunden werden. Sind die Lasten P verschieden gross, so wählt man die am häufigsten vorkommende Last als Grundlast und benutzt für die übrigen Verwandlungswinkel; oder man misst die Ordinaten z mit dem Massstab und multipliziert diejenigen Ordinaten, welche Kräften von abweichender Grösse entsprechen, mit dem Verhältnisse der jeweiligen Last zur Grundlast. —

Ob das erste oder das zweite Verfahren zum Zeichnen der Einflussflächen vorzuziehen ist, lässt sich schwer allgemein entscheiden. Das erste Verfahren gibt weniger zu zeichnen, doch ist es insofern schwieriger, als der Kräftemassstab für jeden Stab ein anderer ist. Beim zweiten Verfahren muss für jeden Stab eine neue Figur gezeichnet werden, die Arbeit ist umfangreicher, dafür der Kräftemassstab ein einheitlicher. Bei Bogen mit gekrümmtem Obergurt ist das erste Verfahren nur für die Gurtungsstäbe brauchbar. (Vgl. Nr. 6.)

6. Bogen mit gekrümmtem Obergurt.

Bei kleineren Spannweiten werden die Bogenträger meistens mit geradem Obergurt gebaut, bei grossen Öffnungen dagegen zieht man es gewöhnlich vor, die obere Gurtung gekrümmt auszuführen (Fig. 14), weil sonst die Streben in der Nähe der Auflager ungünstig lang werden. Die statische Berechnung wird hierdurch grundsätzlich nicht geändert; wir können die Beschreibung auf kurze Erläuterungen beschränken.

Zunächst ist darauf hinzuweisen, dass bei gekrümmtem Obergurt die Drehpunkte der Streben und Pfosten meist weit abseits, oder gar ins Unendliche zu liegen kommen. Damit hängt zusammen, dass gegen den Scheitel zu die Einflussflächen immer grösser, die Kräfte K dagegen umgekehrt immer kleiner werden; die Multiplikation der z und K wird daher mehr und mehr ungenau, bei unendlich fernem Drehpunkt sogar unmöglich. Das erste Verfahren zur Berechnung der Stabkräfte erweist sich aus diesem Grunde kaum mehr brauchbar; es empfiehlt sich, bei Bogen mit gekrümmtem Obergurt von vornherein das zweite Verfahren zu wählen.

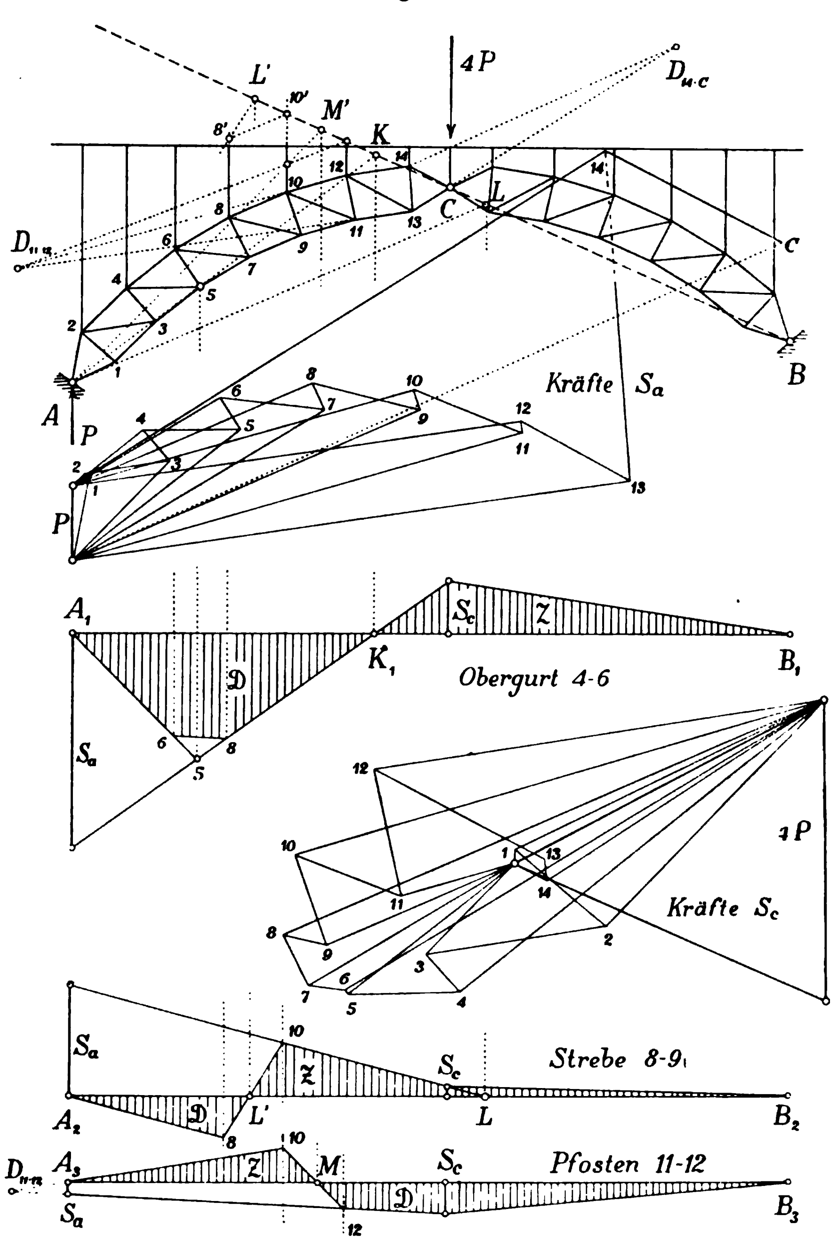
Die Fig. 14 zeigt, wie sich die Zeichnung gestaltet. Sie enthält zunächst zwei Cremona-Pläne, den einen für eine Last P in A, den andern für eine Last P in C. Der letztere ist, damit er deutlich wird, mit der vierfachen Last gezeichnet. Bei unsymmetrischer Bogenform muss noch ein dritter Plan für eine in B angreifende Last gezeichnet werden.

Sodann sind in der Figur die Einflussflächen für die Stäbe 4 6, 8 9 und 11 12 dargestellt. Sie erfordern nach dem Vorangegangenen nur wenig Erläuterungen.

Beim Stabe 4 6 muss die Ecke 5 abgeschnitten werden, weil die benachbarten Angriffspunkte der zufälligen Lasten in 6 und 8 liegen. Man lotet diese Punkte herunter und verkürzt die ursprüngliche Einflussfläche durch die Linie 6 8 um das kleine Dreieck 5 6 8. (Vgl. Teil III, S. 266.)

Für die Strebe 8 9 fällt der Drehpunkt ins Unendliche, man benutzt daher zur Konstruktion der Einflussfläche die Nullpunkte. Um den Nullpunkt L zu finden, verbindet man den unendlich fernen Drehpunkt mit dem Auflager A, d. h. man zieht durch A eine Parallele zu den Gurtungen 8 10 und 7 9 und lotet den Schnittpunkt L mit der Kämpferdrucklinie herunter. Sodann bestimmt

Fig. 14.



4P
L'
10'
M'
8'
K
D
C
L
c
A
P
B
Kräfte Sa
P
A1
K1
B1
Sc
Z
D
Obergurt 4-6
Sa
4P
Kräfte Sc
Sa
Z
Sc
Strebe 8-9
A2
L'
L
B2
D
A3
M
Sc
Pfosten 11-12
Z
D
Sa
B3

man durch eine zweite Parallele 8′ 10′ den zweiten Nullpunkt L', worauf die Einflussfläche mit vollkommen genügender Genauigkeit gezeichnet werden kann. Die Endpunkte der Übergangslinie 8 10 liegen wie immer lotrecht unter den benachbarten Angriffspunkten der zufälligen Last. Die Linien A_2 8 und L 10 müssen sich lotrecht unter dem Drehpunkte schneiden, also zueinander parallel sein.

Für den Pfosten 11 12 kommt der Drehpunkt nach $D_{11\,12}$ zu liegen. Man trägt wie immer zuerst die Kräfte S_a und S_e auf und bestimmt dann mit Hilfe des Drehpunktes den Nullpunkt M' (vgl. Nr. 4, S. 13), worauf die Einflussfläche leicht gezeichnet werden kann. Der Schnittpunkt $D_{11\,12}$ muss lotrecht unter dem Drehpunkt des Pfostens liegen, was als Probe dient. Dass die Pfosten im Bogen der Fig. 14 nicht lotrecht, sondern radial stehen, ändert, wie man sieht, das Verfahren nur unbedeutend.

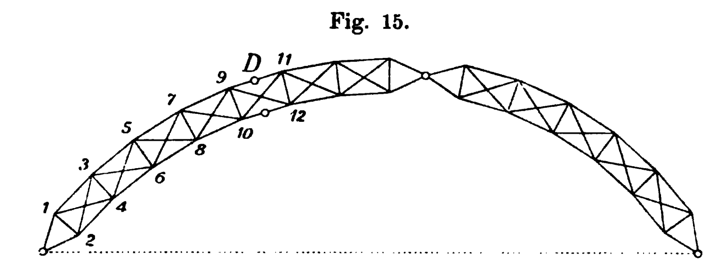
Der Drehpunkt für den Stab 14 C kann, wie schon früher (S. 18) bemerkt wurde, auf der Linie 13 C beliebig angenommen werden; die Einflussfläche nimmt, wie man sich durch Versuche leicht überzeugen kann, stets die nämliche Gestalt an. Wir haben den Drehpunkt willkürlich nach $D_{14\,C}$ verlegt.

Meistens besitzen Bogen mit gekrümmtem Obergurt eine grosse Zahl von Stäben. In solchen Fällen ist es in der Regel gestattet, nur jeden zweiten oder dritten Stab zu berechnen und die Kräfte der dazwischen liegenden Stäbe durch Interpolieren zu bestimmen. Man erspart sich hierdurch einen grossen Teil der Arbeit. Für die Gurtungen ist diese Erleichterung ohne weiteres erlaubt; bei den Streben muss man jedoch mit Vorsicht vorgehen, sobald die Fahrbahnpfosten, was bei grossen Brücken häufig der Fall ist, nicht über jedem Knotenpunkte, sondern nur über jedem zweiten oder dritten stehen. Die Strebenkräfte ändern sich in diesem Falle nicht stetig, sondern der Pfostenteilung entsprechend sprungweise. (Vgl. Tafel III.) Es ist daher nötig, sämtliche Strebenkräfte zu berechnen, oder, wenn man einzelne auslässt, sich wenigstens vorher über das Gesetz der Änderung Klarheit zu verschaffen.

Bogen mit gekrümmten Gurtungen werden nicht selten des besseren Aussehens wegen mit gekreuzten Streben gebaut (Fig. 15). In diesem Falle zeichnet man die Cremona-Pläne je zweimal, einmal für die fallenden, das andere Mal für die steigenden Streben. Dann nimmt man von den Gurtkräften je das arithmetische Mittel, von den Strebenkräften je die Hälfte. Bei einiger Aufmerksamkeit lassen sich auch beide Pläne in einem einzigen vereinigen. (Vgl. Teil II, Nr. 36.) Beim Zeichnen der Einfluss-

flächen verlegt man die Drehpunkte der Gurtungen je in die Mitte des gegenüberliegenden Stabes. So ist beispielsweise D der Drehpunkt für den Stab 10 12. Zwei sich kreuzende Streben haben denselben Drehpunkt. Die radialen Pfosten lassen sich auf gewöhnlichem Wege nicht berechnen, da das Fachwerk jetzt statisch unbestimmt ist. Will man einen ungefähren Anhaltspunkt für die in den Pfosten auftretenden Kräfte er-

Fig. 15.



halten, so berechne man die grösste Kraft im Fahrbahnpfosten, zerlege sie parallel zur Gurtung und zum Radialpfosten und nehme von letzterer Teilkraft die Hälfte.

7. Vollwandige Bogen.

Bogen von kleinerer Spannweite werden nicht selten vollwandig ausgeführt. Meistens besteht der Bogen aus einem genieteten I-Balken; seine Höhe ist bald konstant, bald veränderlich. Aus statischen Gründen macht man zuweilen die Höhe in der Nähe des ersten und dritten Viertels der Spannweite etwas stärker und lässt sie gegen die Gelenke hin abnehmen. Bogen mit geringer Pfeilhöhe werden auch mitunter so gebaut, dass die Blechwand die ganze Fläche zwischen Untergurt und Fahrbahn ausfüllt. Sehr häufig baut man Bogen, die in der Nähe des Scheitels vollwandig, im übrigen fachwerkförmig sind. (Vgl. Tafel I.) Die nachstehenden Erörterungen gelten in diesem Falle nur für den vollwandigen Teil solcher Bogenträger.

Der Rechnungsvorgang ist verschieden, je nachdem man die Querschnittsmasse des Bogens kennt oder nicht.

a) Querschnittsmasse bekannt.

Um einen vollwandigen Bogen statisch zu berechnen, ermittelt man zunächst für verschiedene Querschnitte die „Kernpunkte", d. h. die Endpunkte des „Zentralkerns". (Vgl. Teil I, Nr. 13.) Be-

kanntlich ist der Kernhalbmesser, d. h. die Entfernung des Kernpunktes vom Schwerpunkte

$$k = \frac{J}{Fe} = \frac{i^2}{e} = \frac{W}{F},$$

worin J das Trägheitsmoment des Querschnittes, F seinen Flächeninhalt, e die Entfernung der äussersten Kante vom Schwerpunkt, i den Trägheitshalbmesser und W das Widerstandsmoment bedeutet. Jeder Querschnitt besitzt zwei Kernpunkte, der obere entspricht der untern, der untere der obern Kante des Querschnittes. Ist der Querschnitt unsymmetrisch, so hat man zweierlei W und zweierlei k zu unterscheiden. Ist der Trägheitshalbmesser i bekannt, so lässt sich der Kernpunkt dadurch geometrisch bestimmen, dass man i um 90^0 dreht und darüber von der äussersten Kante aus einen rechten Winkel zeichnet.

Wirkt auf den Querschnitt eine beliebige, in seiner Hauptebene liegende Kraft R, so ist die Spannung in der äussersten Kante

$$\sigma = \frac{Rr}{Fk},$$

worin r den Hebelarm von R in Bezug auf den Kernpunkt bezeichnet. (Vgl. Teil I, S. 56.) Ersetzt man Rr durch M_k („Kernmoment") und Fk durch W, so ist auch

$$\sigma = \frac{M_k}{W},$$

d. h. die grösste Spannung ist gleich dem Kernmoment, dividiert durch das Widerstandsmoment. Bezieht man das Kernmoment auf den obern Kernpunkt, so bekommt man die Spannung in der untern Kante des Querschnittes und umgekehrt. Geht die Kraft R durch den Kernpunkt, so ist die Spannung in der gegenüberliegenden Kante null.

Die Drucklinie für Eigengewicht wird in gleicher Weise wie früher gezeichnet (Nr. 3). Aus ihr lassen sich mittels des Satzes vom Kernmoment die Spannungen σ für beliebige Querschnitte leicht berechnen. Man misst die Kraft R im Krafteck und den Hebelarm r an der Drucklinie ab, schreibt diese Werte zusammen mit den Widerstandsmomenten W in eine Tabelle ein u d berechnet die Spannungen je für obere und untere Kante nach der Formel $\sigma = \frac{Rr}{W}$.

Sodann zeichnet man, um den Einfluss der zufälligen Lasten zu bestimmen, wie früher (Nr. 4 und 5), die Einflussflächen für verschiedene Querschnitte und zwar je für obere und untere Kante, welche hier an Stelle von Ober- und Untergurt treten. Der Gang der Zeichnung ist derselbe wie oben, nur haben wir jetzt die Drehpunkte der Fachwerkstäbe durch die Kernpunkte zu ersetzen. Denn gleich wie in einem Stabe eine Stabkraft null ist, wenn die äussere Kraft durch ihren Drehpunkt geht, so ist die Spannung in einer Kante null, wenn die Kraft durch ihren Kernpunkt geht.

Unter den beiden Verfahren, die in den Nummern 4 und 5 beschrieben worden sind, wählt man am besten das erstere, weil es weniger Arbeit verursacht. Der Cremona-Plan, der zu diesem Verfahren gehört, fällt jedoch weg und wird durch eine Zahlenrechnung ersetzt. Man lässt, wie dort, die vorgeschriebene Einzellast P im Kämpfergelenk als wagrechte Kraft angreifen und berechnet die Spannungen σ_k nach der Kernformel, nämlich

$$\sigma_k = \frac{Pp}{W},$$

wobei p den jeweiligen Abstand der Kraft vom Kernpunkte bezeichnet.

Hat man dann für eine bestimmte Kante die Einflussfläche gezeichnet und deren Ordinatensumme bestimmt, so ist die gesuchte Spannung (vgl. S. 17)

$$\sigma = \frac{\sigma_k \cdot \Sigma(z)}{f}.$$

Selbstverständlich bestimmt man für jede Kante stets zwei Ordinatensummen, die eine stellt das Maximum, die andre das Minimum dar. Für jeden Querschnitt erhält man somit vier verschiedene σ, zwei für die obere und zwei für die untere Kante.

Sind die Spannungen für Eigengewicht und zufällige Last gefunden, so findet man durch Addition die grössten und kleinsten Gesamtspannungen.

Die Berechnung unterscheidet sich im Grunde genommen von derjenigen der Nummer 4 nur dadurch, dass an Stelle der Drehpunkte die Kernpunkte, an Stelle der Kräfte K die Spannungen σ_k und an Stelle der Stabkräfte S die Spannungen σ treten. Das Wesen der Rechnung bleibt das nämliche.

Ist der Bogen nicht durchgehend, sondern nur teilweise voll-

wandig, so wendet man auf den fachwerkförmigen Teil das frühere Verfahren, auf den vollwandigen das vorliegende an; eine gegenseitige Störung ist hierbei in keiner Weise zu befürchten.

b) Querschnittsmasse unbekannt.

Die vorstehenden Regeln gelten, wenn ein fertiges Projekt vorliegt, das eine Kontrollrechnung verlangt, oder wenn eine bereits bestehende Brücke statisch geprüft werden soll; ist dagegen ein Bauwerk neu zu entwerfen, so schlägt man zur Bestimmung der Querschnittsmasse folgenden Weg ein.

Man zeichnet zunächst die Umrisslinien des Bogens, wobei man seine Höhe h je nach Gutfinden konstant oder veränderlich annimmt, und zeichnet die Kernpunkte ein. Der Kernhalbmesser k ist bei Blechbalken mit wenig Kopfplatten angenähert gleich 0,35 h, bei zahlreichen Kopfplatten etwa gleich 0,4 h. Die Kernpunkte lassen sich somit angenähert auftragen. An Stelle der Spannungen σ setzt man ferner als unbekannte Grössen die Produkte $S = \sigma F$, worin F die Gesamtquerschnittsfläche bedeutet, und hat nun

für Eigengewicht . . . . $S_g = (F\sigma_g) = \frac{Rr}{k}$,

für die zufällige Last . . $K = (F\sigma_k) = \frac{Pp}{k}$,

" " " " . . $S_p = (F\sigma_p) = \frac{K \cdot \Sigma(z)}{f}$.

Die Rechnung geht, wie man sieht, auf diejenige für Fachwerkbogen über, nur mit dem Unterschied, dass man auch jetzt noch die K besser durch Zahlenrechnung als durch Zeichnung bestimmt.

Sind nach diesem Vorgang die S für Eigengewicht und zufällige Last berechnet, so setzt man

$$S_q = S_g + S_p,$$

bestimmt die zulässige Spannung und findet hierauf durch Division die gesuchte Querschnittsfläche

$$F = \frac{S}{\sigma}.$$

Man bekommt hierbei für jeden Schnitt zwei verschiedene Werte F, der eine rührt von der untern, der andre von der obern Kante her; für die Ausführung ist je der grössere Wert massgebend.

Schliesslich tut man gut, die Annahme, dass $k = 0{,}35\ h$ ist,

zu prüfen und die Rechnung mit den berichtigten k zu wiederholen, falls sich wesentliche Abweichungen ergeben.

Wie sich das Verfahren ändert, wenn der Bogenquerschnitt rechteckig ist (steinerne Bogen), soll im V. Teil dieses Werkes beschrieben werden.

Ein zweiter Weg zur Berechnung eines Bogens, von dem noch nichts vorliegt als die Umrisslinien, besteht darin, dass man Kopf und Fuss des Querschnittes als Ober- und Untergurt ansieht und jetzt das Verfahren der Nummern 3 und 4 anwendet. Die Berechnung der Streben kommt hierbei in Wegfall. Auch werden die Kräfte K bequemer durch Rechnung als durch Zeichnung bestimmt. Im übrigen ändert sich das Verfahren in keiner Weise. Als Drehpunkt wählt man je den gegenüberliegenden Punkt der andern Gurtung.

Als Gurtungslinien sollte man die Schwerlinien von Kopf und Fuss annehmen. Da diese Linien nicht von vornherein bekannt sind, sondern geschätzt werden müssen, so ist dieser zweite Weg nicht genauer als der erste. Auch sonst bietet er kaum Vorteile. Wohl aber ist er am Platze, wenn ein Bogen zur Berechnung vorliegt, der teils fachwerkförmig, teils vollwandig ist, weil die Arbeit einheitlicher und dadurch übersichtlicher wird, wenn man sich den vollwandigen Teil in zwei Gurtungsstäbe aufgelöst denkt. Die Berechnung des vollwandigen Teiles unterscheidet sich dann von derjenigen des fachwerkförmigen nur dadurch, dass die Streben wegfallen und dass die Drehpunkte der Gurtungen auf der gegenüberliegenden Gurtung angenommen werden. Will man sicher gehen, so berechne man schliesslich, nachdem die Querschnittsmasse bestimmt sind, für ein oder zwei Querschnitte die Spannungen σ so, wie es unter a) gezeigt ist, und bringe an den Massen, wenn nötig, kleine Änderungen an. —

In manchen Fällen mag auch zur vorläufigen Querschnittsbestimmung das folgende Annäherungsverfahren erwünscht sein.

Man nimmt die Belastung gleichförmig verteilt an, sowohl für Eigengewicht (g), als für die Verkehrslast (p), und wählt als Bogenachse eine Parabel (Fig. 16). Dann ist der grösste Scheitelschub

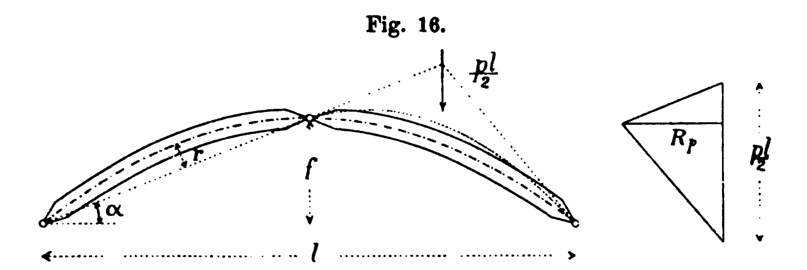
$$H = \frac{(g + p)\, l^2}{8\, f}$$

und der grösste Kämpferdruck

$$R = H \cdot \sqrt{1 + \frac{4\, f^2}{l^2}}.$$

Daraus lassen sich die Querschnittsflächen an den drei Gelenkstellen berechnen. Sodann denkt man sich den Bogen halbseitig mit Verkehrslast bedeckt und berechnet hieraus die Querschnittsmasse im Viertel der Spann-

Fig. 16.



weite. An dieser Stelle wirkt vom Eigengewicht her die Kraft $R_g = \frac{g\,l^2}{8\,f} \cdot \sec\alpha$ und von der zufälligen Last her die Kraft $R_p = \frac{p\,l^2}{16\,f} \cdot \sec\alpha$, wobei $\sec\alpha = \sqrt{1 + \frac{4\,f^2}{l^2}}$. Letztere Kraft wirkt an einem Hebelarm $r = {}^1/_4\,f \cdot \cos\alpha$, so dass sich ein Biegungsmoment

$$M_p = \frac{p\,l^2}{64}$$

ergibt. Nach den Regeln für zusammengesetzte Festigkeit wird nun die Spannung im Viertel der Spannweite

$$\sigma = \frac{R_g + R_p}{F} + \frac{M}{F\,k} \, .$$

Setzt man, wie oben, $k = 0.35\,h$, so lässt sich hiernach die Querschnittsfläche F für das Viertel der Spannweite berechnen; für die dazwischenliegenden Querschnitte bestimmt man F durch Interpolieren.

8. Verschobene Gelenke.

Anstatt die untern Gelenke in die Auflager zu verlegen, kann man sie auch weiter oben anbringen (Fig. 17). Der Träger bleibt nichtsdestoweniger statisch bestimmt; denn auch jetzt ist die Drucklinie für eine beliebige Belastung an drei gegebene Punkte gebunden, lässt sich also eindeutig zeichnen. Über die statische Berechnung solcher Bogen ist folgendes zu bemerken.

An dem Bogen mit verschobenen Gelenken lassen sich drei Teile unterscheiden, der mittlere Teil AB und zwei äussere Teile AA' und BB'. Lasten, die auf dem mittleren Teile ruhen, beanspruchen sämtliche Stäbe des Bogens; denn ihr Einfluss muss durch

die Drucklinie bis zu den Auflagern fortgepflanzt werden. Anders verhalten sich dagegen die äussern Teile. Diese sind als Krag- oder Konsolträger zu betrachten. Eine Last, die auf dem Teile AA' ruht, beansprucht nur die Stäbe, die sich zwischen der Last und dem Auflager A' befinden. Zwar werden sich die Kragträger unter der Wirkung der auf ihnen ruhenden Lasten elastisch verbiegen, und die Gelenke A und B werden hierbei nach innen verschoben; doch bleiben die Stabkräfte zwischen A und B hiervon unberührt, da das Scheitelgelenk eine solche Verschiebung gestattet, ohne Widerstand zu leisten.

Der mittlere Teil des Bogens kann somit wie ein gewöhnlicher Dreigelenkbogen berechnet werden. Seine Stabkräfte hängen nur von den auf ihm ruhenden Lasten ab. Die Stabkräfte der Aussenteile dagegen sind von sämtlichen Lasten des Bogens abhängig. Der Gang der Rechnung gestaltet sich folgendermassen.

Zuerst zeichnet man die Drucklinie für das Eigengewicht und daran anschliessend einen Cremona'schen Kräfteplan, der sich über sämtliche Stäbe erstreckt. Da die Drucklinie durch die drei Gelenke gehen muss, so ist ihre Lage bestimmt. (Vgl. Nr. 3.)

Der Einfluss der zufälligen Lasten wird am besten mittels Einflusslinien bestimmt. Für den Mittelteil werden die Einflussflächen ganz so wie früher gezeichnet. Man zeichnet (Fig. 17) ein Dreieck $A_1 C_1 B_1$ mit der Höhe $\frac{ab}{l}$; dann ist der Horizontalschub für eine Einzellast wie früher

$$H = \frac{P \cdot z}{f},$$

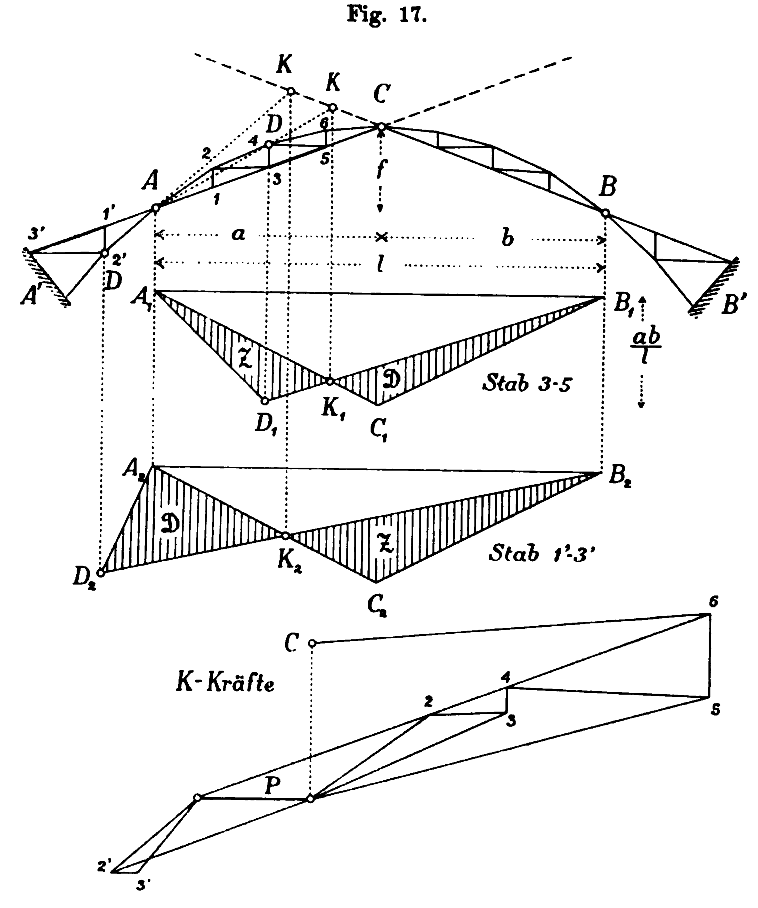
worin z die Ordinate der Dreiecksfläche und f die Entfernung des Gelenkes C von der Sehne AB bezeichnet. (Nr. 2.) Ferner sind die verlängerten Linien AC und BC die Kämpferdrucklinien.

Um die Einflussfläche für einen Stab zu finden, beispielsweise für den Stab 3 5, verbindet man dessen Drehpunkt mit A, schneidet die Kämpferdrucklinie an und lotet den Schnittpunkt herunter nach K_1, dann zieht man $B_1 K_1 D_1$ und $A_1 D_1$, so stellt der Unterschied der beiden Dreiecke die gesuchte Einflussfläche dar.

Sodann lässt man in A und B die Last P in der Richtung der Sehne AB wirken und zeichnet dazu zwei Cremona-Pläne. Von diesen Plänen ist in der Figur nur der linksseitige gezeichnet;

er reicht aus, wenn der Bogen symmetrisch gebaut ist. Nennt man jetzt die Kräfte dieser Pläne K und die Ordinaten der Ein-

Fig. 17.



flussfläche z, so ist die gesuchte Stabkraft für eine Reihe von Lasten (vgl. S. 17)

$$S = \frac{K \cdot \Sigma(z)}{f}.$$

An der Hand der Einflussfläche ist es leicht, die ungünstigste Stellung der Lasten und damit die grösste Stabkraft zu ermitteln.

Was den Stab 6 C betrifft, so haben wir seinen Drehpunkt nach 5 verlegt (vgl. S. 18); der Endpunkt C der K-Kraft 6 C wird in diesem Falle durch eine Linie erhalten, die durch den Endpunkt von P parallel zu 5,6 läuft.

Aber auch die Aussenteile des Bogens lassen sich nach derselben Regel berechnen. Um beispielsweise den Stab 1′3′ zu berechnen, zeichnet man wieder das Dreieck $A_2 C_2 B_2$, verbindet den Drehpunkt D des Stabes (den Punkt 2′) mit A, lotet den Schnittpunkt mit der Kämpferdrucklinie herunter nach K_2 und zieht die Linien $B_2 K_2 D_2$ und $A_2 D_2$, wobei D_2, wie immer, lotrecht unter D liegt.

Um die Richtigkeit dieser Zeichnung einzusehen, braucht man bloss den Einfluss zu verfolgen, den eine einzelne, über die ganze Spannweite wandernde Last P auf den Stab ausübt, wenn man den Bogenschub vernachlässigt. Im Punkte D ist der Einfluss null, dann wächst er linear bis zum Punkte A und nimmt hierauf linear ab bis zum Punkte B; denn während dieser Wanderung ist die Stabkraft von dem lotrechten Auflagerdruck A des mittleren Trägers abhängig und dieser ist der Entfernung der Last von B proportional. Lasten rechts von B endlich üben auf die Stabkraft keinen Einfluss aus. Der Unterschied zwischen den beiden Dreiecken $A_2 C_2 B_2$ und $A_2 D_2 B_2$ stellt daher auch hier die Einflussfläche mit Rücksicht auf lotrechte und wagrechte Kräfte dar. Zur Berechnung der Stabkraft gilt obige Formel für S.

Der Plan der Kräfte K muss, wie man sieht, über sämtliche Stäbe von A' bis C ausgedehnt werden, wie es in der Figur geschehen ist.

Will man zur Berechnung der Stabkräfte das zweite Verfahren (Nr. 5) anwenden, so zeichnet man drei Cremona-Pläne, den einen für eine lotrechte Last P in A, den zweiten für eine in B angreifende Last P und den dritten für eine Last P im Scheitelgelenk. Diese drei Pläne liefern die Elemente der Einflusslinien. Wie sie aufzutragen sind, braucht nicht weiter erklärt zu werden, da die Form der daraus zusammengesetzten Einflussflächen aus der Fig. 13 zu ersehen ist. Auch bietet sich durch Anschneiden der Kämpferdrucklinie mittels der Linie AD beziehungsweise BD stets ein willkommenes Prüfungsmittel für die richtige Gestalt der Einflusslinie.

9. Bogen mit Zugband.

Verbindet man die beiden Auflagergelenke eines dreigelenkigen Bogens durch einen geradlinigen Zugstab (Zuganker), so wird der Horizontalschub von diesem aufgenommen und die Auflager werden

ausschliesslich lotrecht belastet. Ob es möglich und zweckmässig ist, den Bogen mit einem Zugband zu versehen, hängt von den näheren Umständen ab. Vielfach ist ein Zugband der örtlichen Verhältnisse wegen unzulässig. Man wird es im allgemeinen nur dann anbringen, wenn sich die Vermeidung schiefer Auflagerdrücke als besonders wünschbar erweist. Wiederholt sind Zugbänder bei Hallendächern angebracht worden, deren Füsse bis zum Erdboden hinuntergehen, so dass der Anker unter dem Fussboden liegt. Bei Brücken ist das Zugband aus naheliegenden Gründen nur dann zulässig, wenn der Bogen sich ganz oder zum Teil oberhalb der Fahrbahn befindet, so dass das Band in die Fahrbahn gelegt werden kann.

Die Kraft, mit welcher der Zugstab beansprucht wird, ist einfach gleich dem Horizontalschub des Bogens. Das Verfahren zur statischen Berechnung des Bogens unterscheidet sich im übrigen in keiner Weise von dem in den vorigen Nummern beschriebenen.

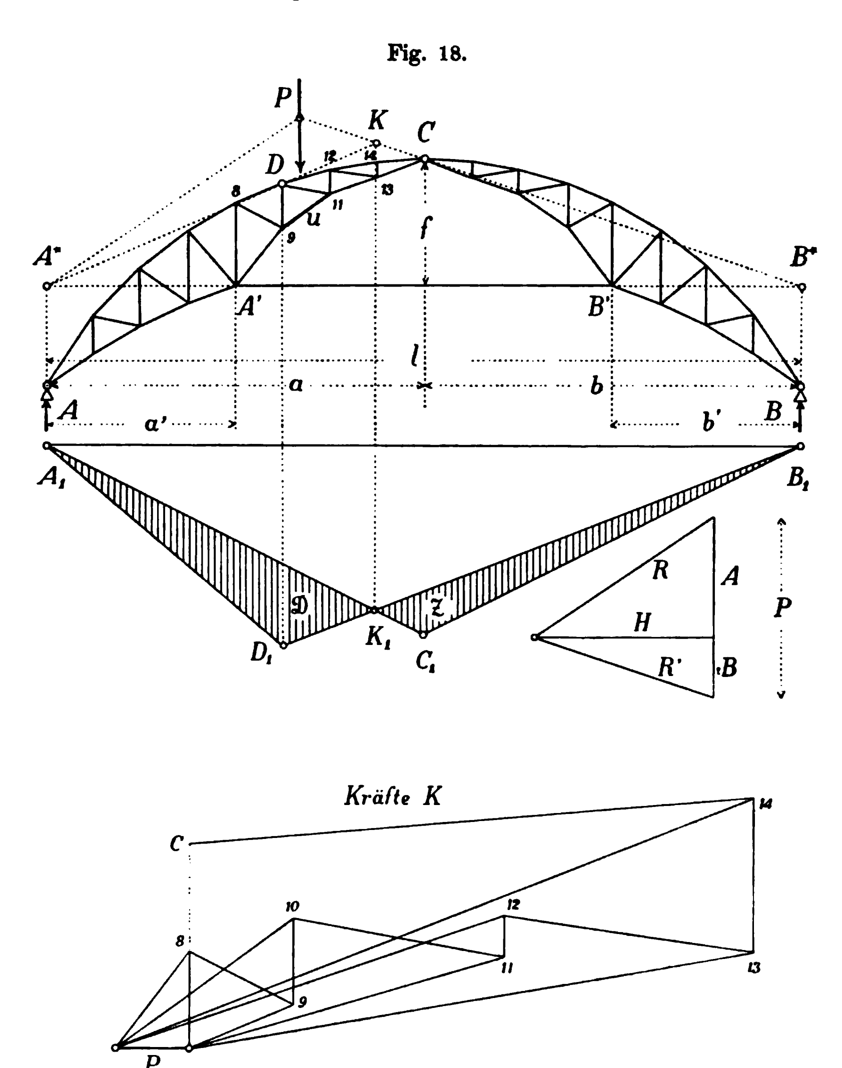
Eine abweichende Bogenform und damit auch eine etwas verschiedene Berechnungsweise ergibt sich dagegen, wenn man das Zugband nicht in der Höhe der Kämpfergelenke, sondern weiter oben anbringt. (Verschobenes Zugband; Schürzenbinder.) Ein Bogen dieser Art ist ebenfalls statisch bestimmt; der Bogen der Fig. 18 z. B. besitzt 31 Knotenpunkte, 59 Stäbe und 3 Auflagerbahnen (ein festes und ein bewegliches Auflager); es ist daher $2k = s + a$.

An einem solchen Bogen sind drei Teile zu unterscheiden, nämlich der Mittelteil $A'B'$ und die beiden Seitenteile AA' und BB' Nur der Mittelteil steht unter dem Einfluss des Horizontalschubs, die beiden Seitenteile dagegen werden ausschliesslich durch lotrechte Kräfte beansprucht und sind daher nach der Theorie der Balkenfachwerke zu berechnen.

Wird der Bogen zwischen A' und B' belastet, so stellt sich wiederum eine Drucklinie ein. Diese geht jedoch nicht durch die Punkte A, C und B, sondern durch A^*, C und B^*. Um die Drucklinie zu zeichnen, verfährt man ganz so wie beim gewöhnlichen Bogen mit drei Gelenken (S. 8). In der Fig. 18 sind die Drucklinie und das zugehörige Krafteck für eine Einzallast P gezeichnet; die Polweite H stellt die Kraft im Zuganker dar, A und B sind die beiden Auflagerdrücke. Die Stabkräfte können unschwer nach Cremonas Methode bestimmt werden. Wenn mehrere Kräfte angreifen, so trägt man die auf den Trägerteil ACA' wirkenden Kräfte

dem Umfange folgend der Reihe nach auf; also zuerst den Auflagerdruck A, dann die Lasten, die an den obern Knotenpunkten zwischen A und C angreifen, hierauf den in C wirkenden Scheitel-

Fig. 18.



schub und schliesslich die Kraft des Zugbandes. Greifen auch Lasten an den unteren Knotenpunkten an, so sind diese entsprechend einzuschalten. Hierauf folgt die Zerlegung nach **Cremonas** Verfahren. Eine nähere Erläuterung dürfte überflüssig sein.

Nach diesem Vorgang lässt sich der Einfluss des eigenen Gewichtes ermitteln. Bei Dachbindern kann auch der Einfluss einer einseitigen Schneelast auf diesem Wege bestimmt werden. Bei Brückenträgern dagegen muss die statische Berechnung auf die ungünstigsten Belastungen Rücksicht nehmen; demgemäss haben wir die Wirkung einer Einzellast zu untersuchen und Einflussflächen zu zeichnen.

Belastet man (Fig. 18) den Bogen mit einer einzelnen Last P, so zerlegt sich diese parallel zu PA^* und PCB^* in die Kräfte R und R'. Dabei ergibt sich, ganz wie früher, dass der Horizontalschub der Entfernung der Last vom Auflager proportional ist. Die Einflussfläche für den Horizontalschub ist daher auch hier ein Dreieck $A_1\,C_1\,B_1$, dessen Spitze lotrecht unter C liegt. Befindet sich die Last im Scheitel, so ist

$$H_c = \frac{P\,a\,b}{f\,l},$$

worin f die Entfernung des Scheitelgelenkes vom Zugband bezeichnet (vgl. Nr. 2). Bei symmetrischer Bogenform für $a = b = \frac{1}{2}\,l$, wird

$$H_c = \frac{P\,l}{4\,f}.$$

Macht man die Höhe des Dreieckes $A_1\,C_1\,B_1$ gleich $\frac{a\,b}{l}$ und nennt dessen Ordinaten z, so ist

$$H = \frac{P\,z}{f}.$$

Der Horizontalschub wird am grössten, wenn die ganze Spannweite belastet ist. Bei gleichförmig verteilter Belastung wird

$$H = \frac{p\,a\,b}{2\,f},$$

oder bei symmetrischer Anordnung

$$H = \frac{p\,.\,l^2}{8\,f}.$$

Um die Einflusslinien für einzelne Stäbe zu finden, wendet man am besten das in der Nummer 4 beschriebene Verfahren an. Die Fig. 18 zeigt, wie man die Einflussfläche für den Stab 9 11 bekommt. Der Gang der Arbeit ist der nämliche, wie bei der Fig. 7. Die Einflussfläche ist gleich dem Unterschied zwischen dem Dreieck $A_1\,C_1\,B_1$ und dem Dreieck $A_1\,D_1\,B_1$. Den Massstab

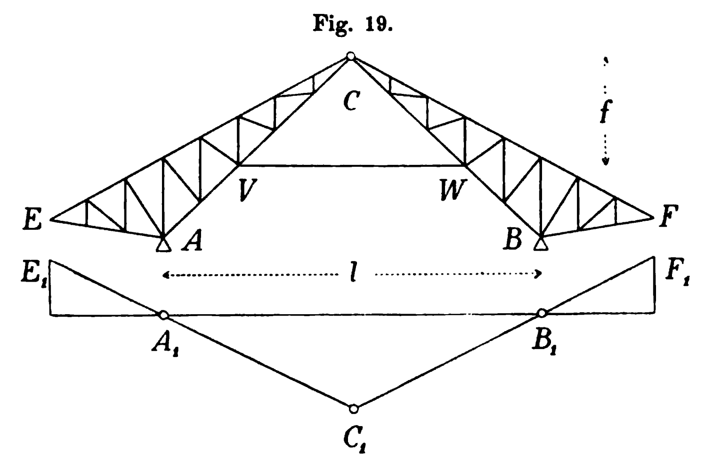
der Einflussfläche findet man, wenn man (Fig. 18 unten) einen Cremona-Plan für eine im Punkte A' wagrecht angreifende Kraft P zeichnet. Nennt man die Kräfte dieses Planes K und die Ordinaten der Einflussfläche z, so ist die Stabkraft

$$S = \frac{K \cdot \Sigma(z)}{f}.$$

Diese Rechnungsweise bezieht sich jedoch nur auf die Stäbe des Mittelteils; die beiden Aussenteile des Bogens verhalten sich, wie schon bemerkt, wie gewöhnliche Balkenfachwerke und sind nach den Regeln zu berechnen, die im II. Teil dieses Werkes abgeleitet wurden. —

Zu den Bogen mit Zugbändern gehören auch Dachstühle wie der durch die Fig. 19 dargestellte. Die Einflussfläche für den

Fig. 19.



Horizontalschub nimmt hier die Form $A_1\, C_1\, B_1$ an. Lasten innerhalb AB rufen im Verbindungsanker Zug hervor, Lasten auf den überhängenden Teilen dagegen Druck. Meistens begnügt man sich damit, den Dachstuhl für vollständige lotrechte Belastung (Eigengewicht und Schnee) und für Winddruck zu berechnen. Richtiger wäre es jedoch, zwei Fälle zu unterscheiden, den einen mit Schneelast zwischen A und B, den andern mit Schneelast ausserhalb AB. Zur Berechnung der Stabkräfte wendet man am einfachsten Cremona'sche Kräftepläne an. Über die Berechnung der Windkräfte siehe die Nummer 14.

Ist der Bogen vollwandig, so gelten die Regeln und Verfahren

der Nummer 7. Bei kleineren Spannweiten und für provisorische Berechnungen kann man mit Vorteil die folgenden, leicht abzuleitenden Formeln benutzen.

Bezeichnet p die Belastung des Bogens auf die Längeneinheit bezogen, so ist (vgl. Fig. 18)

der Auflagerdruck . . . . $A = {}^1/_2\, p\, l$,
das Biegungsmoment in A' $= {}^1/_2\, p\, a'(l - a')$,
die Kraft im Zugband . . $Z = \frac{p \cdot l^2}{8f}$.

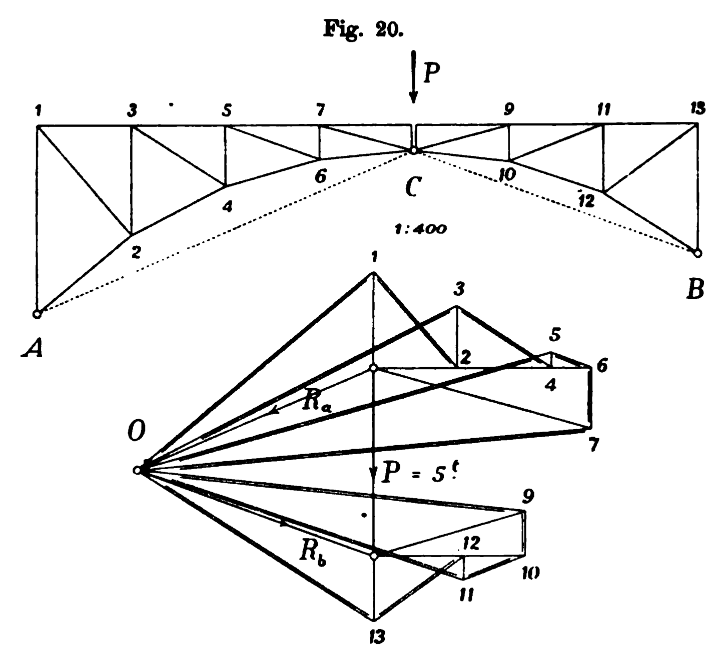
10. Elastische Formänderungen. Williot'scher Verschiebungsplan.

Es ist für verschiedene Zwecke wünschenswert, die elastischen Formänderungen des Bogens, im besonderen die lotrechten Senkungen und Hebungen, die sich unter gegebenen Belastungen einstellen, kennen zu lernen. Um diese Formänderungen zu ermitteln, gibt es kaum ein einfacheres Mittel, als einen Williot'schen Formänderungs- oder Verschiebungsplan zu zeichnen. Im II. Teil dieses Werkes, Nr. 25, ist dieses Verfahren bereits erläutert worden. Es besteht im wesentlichen darin, dass zunächst für die gegebenen Belastungen sämtliche Stabkräfte und hieraus die elastischen Verlängerungen und Verkürzungen der Stäbe berechnet werden. Dann werden unter Festhaltung eines Anfangsstabes Schritt für Schritt die elastischen Verschiebungen der einzelnen Knotenpunkte zeichnerisch bestimmt. Schliesslich hat man durch geeignete Drehung des Stabnetzes gewissen Auflager- oder andern Bedingungen zu genügen.

Die Fig. 20—22 zeigen, wie die Formänderungen eines dreigelenkigen Bogens für eine über dem Scheitel stehende Last P bestimmt werden.

Zunächst zeichnet man für die gegebene Last einen Cremona'schen Kräfteplan (Fig. 20 unten). Die einzelnen Kräfte sind in üblicher Weise numeriert; überdies sind Zug- und Druckkräfte durch einfache und doppelte Linien unterschieden. Nun berechnet man die elastischen Verlängerungen und Verkürzungen der Stäbe nach der Formel $\Delta s = \frac{S s}{F E}$. Die nachfolgende Tabelle enthält

Fig. 20.



die hierzu nötigen Zahlen. Der Elastizitätsmodul E wurde gleich $2000\, t : cm^2$ gesetzt.

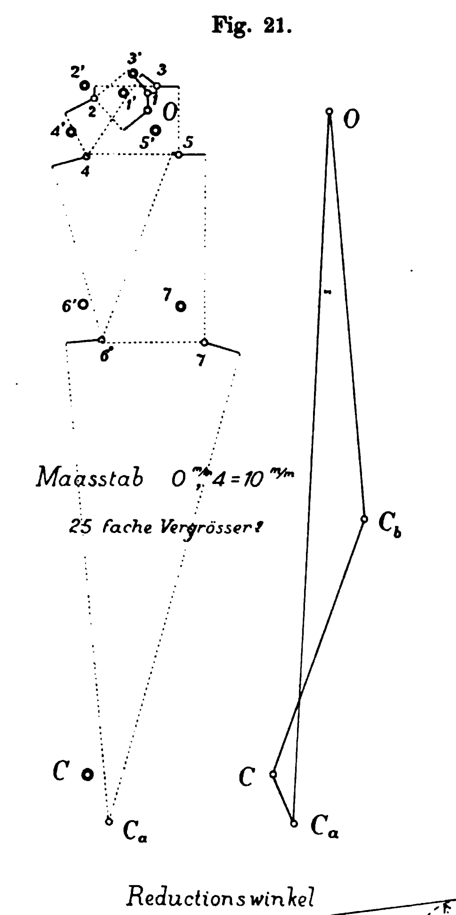
Nr.	S	s	F	Δs	Nr.	S	s	F	Δs
	t	cm	cm²	mm		t	cm	cm²	mm
1 3	+ 2,2	500	100	−0,0550	6 7	− 1,6	180	80	+ 0,0180
3 5	+ 4,7	500	100	−0,1175	7 C	+ 6,0	518	80	− 0,1940
5 7	+ 5,7	500	100	−0,1425	13 11	+ 2,4	500	100	− 0,0600
A 2	− 8,2	650	150	+0,1775	11 9	+ 4,0	500	100	− 0,1000
2 4	− 9,5	560	150	+0,1775	B 12	− 7,4	592	150	+ 0,1470
4 6	− 11,4	520	150	+0,1975	12 10	− 9,1	526	150	+ 0,1595
6 C	− 12,1	502	150	+0,2025	10 C	− 10,4	504	150	+ 0,1750
A 1	+ 2,6	1000	150	−0,0868	B 13	+ 1,7	693	150	− 0,0898
1 2	− 3,4	790	80	+0,1680	13 12	− 2,9	620	80	+ 0,1122
2 3	+ 1,7	582	80	−0,0620	12 11	+ 0,6	366	80	− 0,0137
3 4	− 3,0	592	80	+0,1110	11 10	− 1,8	536	80	+ 0,0603
4 5	+ 0,4	324	80	−0,0081	10 9	− 1,2	196	80	+ 0,0147
5 6	− 1,1	532	80	+0,0366	9 C	+ 4,2	518	80	− 0,1360

In der Fig. 21 wurden sodann die einzelnen Δs nach Williots Vorgang für die linke Bogenhälfte aneinander gereiht und zwar

mit 25-facher Vergrösserung. Der Punkt A und der Stab $A\,1$ wurden hierbei festgehalten. Die Verschiebung des Punktes C ergab sich hieraus $O\,C_a = 0{,}377$ cm.

Dieselbe Arbeit wurde für die rechte Hälfte des Bogens durchgeführt. Die betreffende Zeichnung haben wir jedoch, da sie nichts neues zeigt, wieder ausgelöscht. Sie ergab die Verschiebung von C in Bezug auf das rechte Auflager $O\,C_b = 0{,}218$ cm.

Fig. 21.



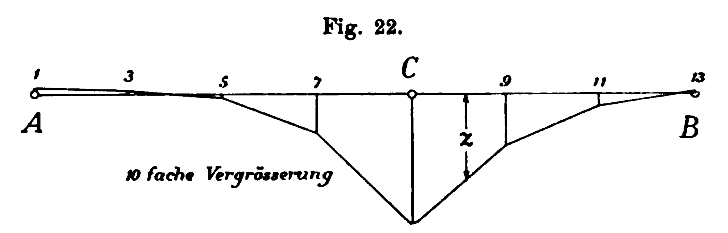
Nun wurden in der Fig. 21 rechts die beiden Verschiebungen gemeinschaftlich aufgetragen. Da hierbei die Punkte C_a und C_b nicht zusammenfielen, so mussten noch Drehungen vorgenommen werden: Die linke Bogenhälfte muss um den Punkt A, die rechte um den Punkt B soweit gedreht werden, bis beide Punkte C zur Deckung gelangen. Man zieht zu diesem Zwecke durch C_a eine Senkrechte zu $A\,C$ und durch C_b eine Senkrechte zu $B\,C$, bis sich beide Linien in C schneiden.

$C_a\,C$ gibt an, um wieviel die linke Bogenhälfte gedreht werden muss. Diese Drehung müssen sämtliche Knotenpunkte von 1 bis 7 mitmachen; die Punkte werden daher proportional ihrer Entfernung von A und senkrecht zur Verbindungslinie mit A verschoben. Die Verschiebungen bestimmt man mittels eines Verwandlungswinkels mit dem Verhältnis $C\,C_a : A\,C$ (Fig. 21 unten), worauf man die neuen, mit Doppelringen bezeichneten Punkte erhält.

Die gleiche Arbeit wurde mit der rechten Bogenhälfte durchgeführt.

In der Fig. 22 wurden schliesslich die lotrechten Verschiebungen der obern Knotenpunkte übersichtlich, in 10-facher Vergrösserung aufgetragen; sie bilden die Durchbiegungslinie der obern Gurtung.

Fig. 22.



Die Durchbiegungskurve für eine Last über dem Scheitel ist nach dem Satze von der Gegenseitigkeit der Formänderungen (Teil III, S. 258) zugleich die Einflusslinie für die Scheitelsenkung. Stehen mehrere Lasten auf dem Bogen, so lässt sich die Scheitelsenkung durch Summieren der Ordinaten z der Durchbiegungslinie ermitteln. Besitzen die Lasten verschiedene Grösse, so wählt man die am häufigsten vorkommende als Grundlast und verwendet für die z, die zu abweichenden Lasten gehören, Verwandlungswinkel. Auf diese Weise ist es leicht, die Scheitelsenkung für beliebige Laststellungen, für volle und halbseitige Belastung zu bestimmen.

11. Elastische Formänderungen bei konstantem Trägheitsmoment.

Ist das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes ganz oder nahezu konstant und der Bogen zugleich symmetrisch, so ist es bequemer, die Durchbiegung des Bogens mittels Formeln zu berechnen. Wir gehen dabei von der Annahme aus, dass das Trägheitsmoment J vom Scheitel nach den Kämpfern hin allmählich wachse und zwar proportional der Sekante des Neigungswinkels der Bogenachse. Wir setzen also $J = J_0 . \sec\alpha = J_0 . \frac{ds}{dx}$, worin J_0 das Trägheitsmoment des Scheitelquerschnittes bezeichnet. Diese Annahme führt zu einfacheren Ausdrücken, als die Annahme eines ganz konstanten Trägheitsmomentes. Die Bogenachse nehmen wir parabolisch an.

Die Durchbiegung eines Bogenträgers ist von drei Faktoren abhängig, erstens von der Wirkung der Biegungsmomente, zweitens von der achsialen Zusammenpressung und drittens (bei Fachwerkbogen) von der Formänderung der Streben. Es ist am besten, die drei Einflüsse getrennt zu untersuchen. Als Belastung wählen wir, wie in der vorigen Nummer, eine Einzellast über dem Scheitel.

a) Durchbiegung infolge der Biegungsmomente.

Wir gehen bei den nachfolgenden Rechnungen von einem vollwandigen Bogen aus, die Ergebnisse lassen sich dann leicht auf Fachwerkbogen übertragen.

Bezeichnet man (Fig. 23) den lotrechten Abstand der Kraft R von der Bogenachse mit m, so ist das Moment im Punkte D gleich $m . \cos\beta . R$, oder gleich $H . m$. Für eine im Scheitel stehende Last ist $H = \frac{P a}{2 f}$. Ferner ist, wenn die Bogenachse einer Parabel folgt,

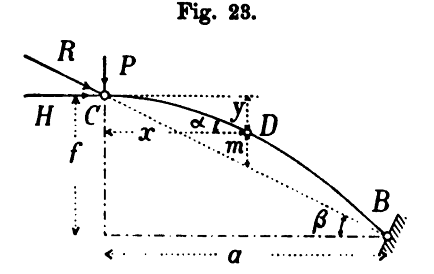
$$m = \frac{f x (a - x)}{a^2},$$

somit

$$M = \frac{P x (a - x)}{2 a}.$$

Zunächst berechnen wir, um wieviel sich der Scheitel unter der Wirkung der Biegungsmomente senkt. Hierzu wendet man am einfachsten den Satz von den virtuellen Arbeiten an. (Vgl. Teil III, S. 253). Nennt man die Einsenkung v_c, so ist die Arbeit der äussern Kraft P gleich $P . v_c$. Die Arbeit der innern Kräfte ist für ein Bogenelement gleich $\frac{M^2 . ds}{E J}$, oder,

Fig. 23.



wenn man obiger Annahme gemäss $J = J_0 \frac{ds}{dx}$ setzt, gleich $\frac{M^2 . dx}{E J_0}$. Führt man für M obigen Wert ein, integriert von o bis a und multipliziert mit 2, so findet man

$$v_c = \frac{P a^3}{60 E J_0}.$$

Unter der Wirkung der Biegungsmomente verbiegt sich sodann die Bogenachse nach unten. Die vertikalen Verschiebungen der einzelnen Bogenpunkte lassen sich, wie bei wagrechten Balken, mittels der Differentialgleichung der elastischen Linie $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EJ_0}$ berechnen. Setzt man für M obigen Ausdruck ein und beachtet, dass für $x = O$, $v = v_c$ und für $x = a$, $v = O$ werden muss, so bekommt man

$$v = \frac{P(2a^4 - 7a^3x + 10ax^3 - 5x^4)}{120aEJ_0}.$$

Für $\frac{x}{a} =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
wird $\frac{60EJ_0}{Pa^3}.v =$	1,000	0,655	0,336	0,065	−0,144	−0,281	−0,344

0,7	0,8	0,9	1,0
−0,335	−0,264	−0,145	−0,000.

Die Formel für v bezieht sich zunächst auf vollwandige Bogen, lässt sich aber auch auf Fachwerkbogen anwenden, wenn man $J_0 = \frac{1}{2}F_g h^2$ setzt. (F_g = Querschnittsfläche einer Gurtung, h = Entfernung beider Gurtungen.) Sind F_g und h veränderlich, so führt man Mittelwerte ein, oder richtiger, man berechnet die Werte $J.\cos\alpha = \frac{1}{2}F_g h^2 \cos\alpha$ und setzt deren Durchschnitt an Stelle von J_0.

Die Durchbiegungskurve für die Scheitellast ist zugleich die Einflusslinie für die Scheitelsenkung und gestattet, die Scheitelsenkung für beliebige Belastungen zu bestimmen. Ist die Belastung gleichförmig verteilt, so misst man den Inhalt der Einflussfläche und ersetzt P durch p. Bedeckt die Last die halbe Spannweite, so bekommt man die Scheitelsenkung, wenn man in obiger Formel P durch $p.dx$ ersetzt und von O bis a integriert. Das Ergebnis ist null. Bei halber und demgemäss auch bei ganzer Belastung der Spannweite ergibt sich somit unter der Wirkung der Biegungsmomente keine Senkung des Scheitels.

b) Durchbiegung infolge der achsialen Pressung.

Durch die Verkürzung der Bogenachse infolge ihrer Zusammenpressung wird die Durchbiegung des Bogens vergrössert. Es genügt in der Regel, diesen zweiten Einfluss angenähert zu berechnen, indem man die Druckspannung σ durchgehends konstant und zwar gleich

$\frac{H}{F}$ voraussetzt. Dann ist die virtuelle Arbeit der Kraft P gleich $P \cdot v_c$ und die Arbeit der inneren Kräfte gleich $\int_{-s}^{+s} \frac{H^2 \, ds}{EF} = \frac{H^2 \cdot 2s}{EF}$.

Für $2s$ darf man genau genug $2a + \frac{4}{3}\frac{f^2}{a}$ setzen. Dann wird

$$v_c = \frac{H(3a^2 + 2f^2)}{3fEF}.$$

Ausserdem senken sich die einzelnen Bogenpunkte proportional der Länge m um $\frac{Hm}{FE}$. Die Gesamtsenkung ist demnach

$$v = \frac{a-x}{a} v_c + \frac{Hm}{EF} = \frac{P(a-x)(3a^3 + 2af^2 + 3f^2 x)}{6af^2 EF}.$$

Setzt man beispielsweise $f = \frac{1}{2} a$, so wird

für $\frac{x}{a}$ =	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{3EF}{7Pa} \cdot v$ =	1,000	0,919	0,834	0,745	0,652	0,554	0,451	0,345	0,234	0,119	0,000.

Dieser zweite Teil der Durchbiegung darf in der Regel nicht vernachlässigt werden, da er, namentlich bei flachen Bogen, beträchtlich ins Gewicht fallen kann; beispielsweise macht er bei $f = {}^1/_2\, a$ und $i = 0{,}1\, f$ im Scheitel $35\,\%$ des ersten Teiles aus.

Ist die Querschnittsfläche F des Bogens veränderlich, so setzt man einen Durchschnittswert in die Formel ein.

Bedeckt man den halben Bogen mit gleichförmig verteilter Last, so hat man P durch $p \cdot dx$ zu ersetzen und v von O bis a zu integrieren; die Scheitelsenkung ergibt sich in diesem Falle

$$v_c = \frac{p\,a^2(a^2 + f^2)}{4f^2 EF}.$$

Bei Belastung des ganzen Bogens erhält man doppelt soviel.

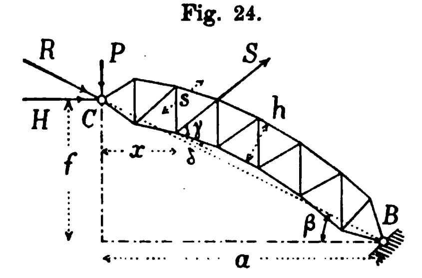
c) Durchbiegung infolge der Verlängerung und Verkürzung der Streben.

Was bei Blechbalken das Stehblech leistet, das besorgen bei Fachwerken die Streben, sie nehmen die Querkräfte auf und vergrössern dabei die elastischen Durchbiegungen. Während aber die

Blechwand in der Regel so stark ist, dass sie die Formänderungen nur wenig beeinflusst, üben die Streben auf die Durchbiegungen meistens einen ansehnlichen Einfluss aus. Auf alle Fälle ist es ratsam, diesen Einfluss wenigstens angenähert zu berechnen, wenn die Rechnung mit der Messung übereinstimmen soll.

Nach den Bezeichnungen der Fig. 24 ergibt sich $R = \frac{P}{2 \sin \beta}$.

Fig. 24.



Ferner ist, wenn die Strebenkraft mit S bezeichnet wird, $S : R = \sin \delta : \sin \gamma$, oder, da $\sin \gamma = \frac{h}{s}$,

$$S = \frac{P s \sin \delta}{2 h \sin \beta}.$$

Nennt man, wie früher, die Scheitelsenkung v_c, so folgt aus der Arbeitsgleichung die Beziehung $P . v_c = \Sigma \frac{S^2 s}{E F}$ oder

$$v_c = \Sigma \frac{P s^3 \sin^2 \delta}{4 E F h^2 \sin^2 \beta}.$$

Für $x = O$ ist der Winkel δ gleich β, für $x = \frac{1}{2} a$ gleich O und für $x = a$ annähernd gleich $-\beta$. Der durchschnittliche Wert von $\sin^2 \delta$ ist daher annähernd gleich $1/3 \sin^2 \beta$. Bezeichnet man noch die Zahl der Streben mit n, so wird

$$v_c = n . \frac{P s^3}{12 E F h^2}.$$

Bei der Anwendung dieser Formel trennt man am besten die lotrechten Streben von den schiefen, berechnet v_c für diese, wie für jene besonders und addiert schliesslich beide Ergebnisse. Für s, h und F darf man genau genug Mittelwerte einführen. Die Zahl n bezieht sich stets auf die Gesamtzahl der Streben von einem Auflager bis zum andern.

Zwischen C und B verbiegt sich der Bogen, ähnlich wie ein Fachwerk mit parallelen Gurtungen, nach einer Parabel. Die Durchbiegung v_m in der Mitte von a ist nach den Erörterungen von Teil III, S. 20—21, gleich $\frac{M s^3}{E F f h^2}$. Ersetzt man M durch $\frac{P a}{8}$ (S. 43) und f durch $\frac{2 a}{n}$, so wird die Durchbiegung $v_m = n . \frac{P s^3}{16 E F h^2}$.

Hieraus ergibt sich die Gleichung der Durchbiegungskurve

$$v = v_c \cdot \frac{a - x}{a} - v_m \frac{4\,x(a - x)}{a^2} = n \cdot \frac{P\,s^3}{12\,E\,F\,h^2} \cdot \frac{(a - x)(a - 3\,x)}{a^2}.$$

Für $\frac{x}{a} =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
wird $\frac{12\,E\,F\,h^2}{n\,P\,s^3} \cdot v =$	1,00	0,63	0,32	0,07	−0,12	−0,25	−0,32

$\frac{x}{a} =$	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{12\,E\,F\,h^2}{n\,P\,s^3} \cdot v =$	−0,33	−0,28	−0,17	0,00.

12. Einfluss der Wärme.

Wärmeschwankungen haben auf die Stabkräfte eines Bogens mit drei Gelenken keinen Einfluss; statisch bestimmte Fachwerke bleiben allgemein von den Einflüssen veränderlicher Wärme verschont, so lange die Stäbe sämtlich gleichmässig warm oder kalt werden. (Vgl. Teil II, S. 6.) Wohl aber entstehen im dreigelenkigen Bogen infolge zunehmender oder abnehmender Wärme vertikale Hebungen und Senkungen der Fahrbahn.

Diese Bewegungen sind denen eng verwandt, die sich aus der achsialen Zusammenpressung des Bogens ergeben. (S. d. vorige Nr.) Denn hier wie dort entstehen Längenveränderungen der Bogenelemente, die deren Längen proportional sind. Um die Durchbiegungskurve für eine Wärmeerhöhung von t Graden zu finden, brauchen wir, wenn mit α der Ausdehnungskoeffizient bezeichnet wird, einfach $\sigma = \frac{H}{E\,F}$ durch $\alpha\,t$ zu ersetzen. Das führt zu der Formel

$$v = \frac{(a - x)(3\,a^3 + 2\,a\,f^2 + 3\,f^2\,x)\,\alpha\,t}{3\,a^2\,f}.$$

Für den Scheitelpunkt wird

$$v_c = \frac{a(3\,a^2 + 2\,f^2)\,\alpha\,t}{3\,a\,f}.$$

13. Wagrechte Belastungen.

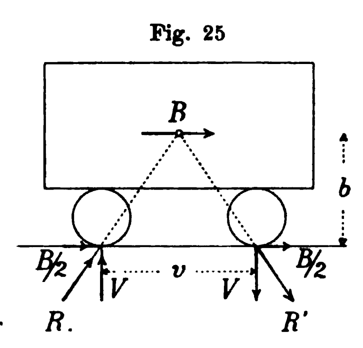
Bremskräfte.

Wagrechte Belastungen entstehen bei Eisenbahnbrücken durch das Bremsen der Bahnzüge. Der Einfluss dieser Belastung lässt sich wie folgt bestimmen.

Die Bremskraft kann man nach angestellten Versuchen gleich einem Sechstel des Zuggewichtes setzen. Ob dabei sämtliche Fahrzeuge oder nur ein Teil als gebremst anzusehen sind, ist eine Frage, die durch behördliche Vorschriften geordnet werden muss.

Die Bremskraft B wirkt in wagrechter Richtung in der Höhe des Schwerpunktes des Bahnzuges, bei Personen- und Güterwagen etwa 1,5 m, bei Lokomotiven etwa 2 m oberhalb der Schienen. Sie geht durch die Räder auf die Schienen und von diesen auf die Brücke über. Bei einem zweiachsigen Wagen (Fig. 25) zerlegt sich, wenn alle Räder gebremst werden, die Kraft B in zwei geneigte Teilkräfte R und R', die durch die Berührungspunkte zwischen Rad und Schiene gehen. Zerlegt man diese Kräfte wagrecht und senkrecht, so bekommt man zwei Kräfte V, welche angeben, um wieviel die eine Wagenachse belastet, die andre entlastet wird, und zwar ist $V = \frac{B\,b}{v}$. Die beiden wagrechten Komponenten sind zusammen gleich B; man darf sie wohl stets gleich $^1/_2\ B$ setzen.

Fig. 25

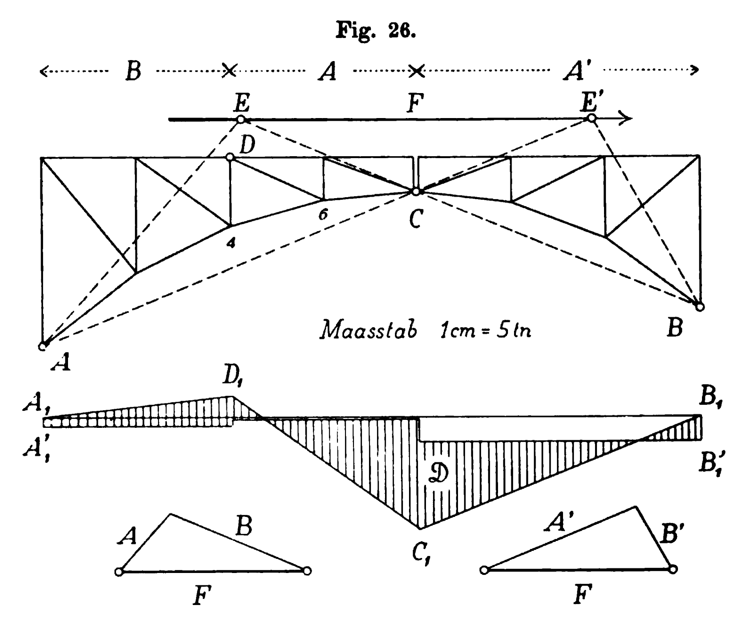


Wird ein ganzer Zug gebremst, so werden durchgehends die vordern Achsen belastet, die hintern entlastet. Da sich Belastung und Entlastung für jedes Fahrzeug wieder aufheben, so darf man gewöhnlich annehmen, dass die Bremskraft einfach in Schienenhöhe zur Wirkung gelange. Will man die Stabkräfte mit Rücksicht auf die Bremswirkung genau bestimmen, so muss man zunächst die Einflusslinien umändern. Es empfiehlt sich, hierbei das zweite Verfahren (Nr. 5) anzuwenden.

Die Fig. 26 stellt die Einflussfläche für den untern Gurtstab 4 6 dar. Die Einzellast P haben wir gleich 7,5 t angenommen. Das Viereck $A_1\,D_1\,C_1\,B_1$ ist die Einflussfläche ohne Rücksicht auf die Bremsung; wie sie gefunden wird, ist früher (S. 21) erklärt worden. Die Bremskraft ist $F = {}^1/_6\,P = 1{,}25\ t$. Wenn nun die Last P auf der linken Bogenhälfte steht, so zerlegt sich F in die Richtungen $E\,A$ und $E\,C\,B$. Bei rechts fahrendem Zug wirkt in $A\,E$ eine Zugkraft, in $E\,B$ eine Druckkraft. Tritt P auf die rechte Seite vom Scheitelgelenk, so zerlegt sich F parallel zu $A\,E'$ und zu $E\,B$.

Die Bremskräfte, die im Stabe 4 6 auftreten, lassen sich jetzt leicht berechnen. Wir tragen die Kraft F wagrecht auf und zerlegen sie einmal parallel zu AE und EB und dann parallel zu AE' und zu $E'B$ (Fig. 26, unten links und rechts). Aus den

Fig. 26.



Teilkräften A, B, A' und B' ergeben sich hierauf die Stabkräfte $\varDelta U$. Es sind durchgehends Zugkräfte. So lange P zwischen A und D liegt, ist die Kraft B massgebend, von D bis C die Kraft A und von C bis B die Kraft A'. Innerhalb dieser drei Strecken bleibt die Kraft $\varDelta U$ jeweilen konstant.

Fügt man nun in der Figur die Bremskräfte $\varDelta U$ zu den bisherigen Ordinaten hinzu, so rückt die Grundlinie $A_1 B_1$ der Einflussfläche hinunter nach $A'_1 B'_1$, und es entsteht die in Fig. 26 schraffierte Fläche. Wie man sieht, wird die Einflussfläche durch die Rücksichtnahme auf die Bremsung nicht unerheblich verändert.

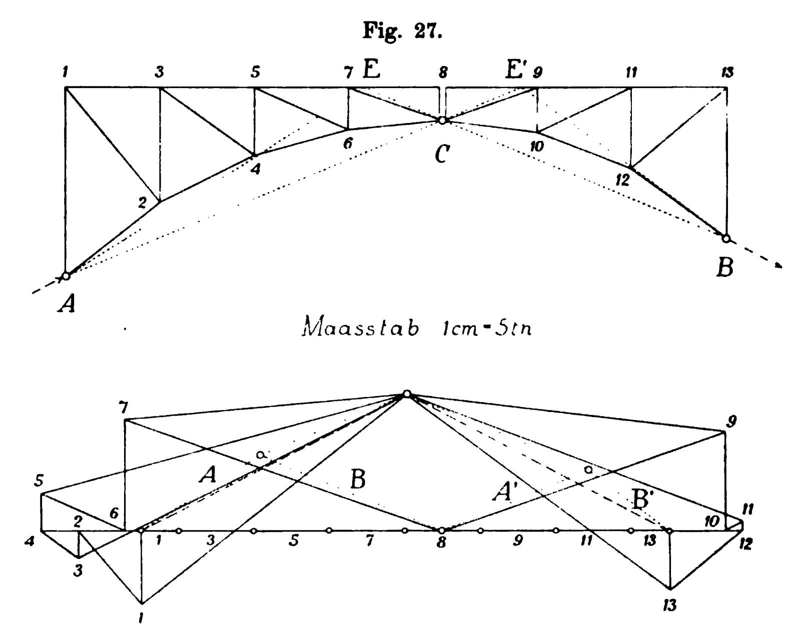
Fährt der Bahnzug in der entgegengesetzten Richtung, so wechseln die Kräfte $\varDelta U$ ihr Zeichen, und die Linie $A_1 B_1$ rückt nicht hinunter, sondern hinauf. Im ersteren Fall findet man aus der Einflussfläche die grösste Zugkraft, im letzteren die grösste Druckkraft des Stabes.

Sollen sämtliche Stäbe in dieser Weise berechnet werden, so

zeichnet man vier Cremona-Pläne, zwei mit den Kräften *A* und *B* und zwei mit den Kräften *A'* und *B'*. Die Pläne mit *B* und *A'* dehnt man über sämtliche Stäbe des Bogens aus, die beiden andern bloss auf die betreffende Bogenhälfte. Bei einiger Aufmerksamkeit wird man über die Art des Auftragens der hieraus sich ergebenden Kräfte kaum im Zweifel sein. Bei symmetrischer Bogenform beschränkt sich die Arbeit auf die Hälfte.

Wird vorgeschrieben, dass nicht alle Achsen gebremst werden, sondern beispielsweise nur ein Drittel aller Güterwagen, so wird

Fig. 27.



die Arbeit etwas umständlicher. Man trägt in diesem Falle die Bremskräfte sowohl ganz, als auch zu einem Drittel auf und geht beim Summieren der Ordinaten bei Lokomotivrädern von der ersteren, bei Güterwagen von der letzteren Linie aus.

Bei Bogen mit gekrümmtem Obergurt ändert sich in der Berechnung der Bremswirkung nichts weiter, als dass die Bremskraft *F* nur an einem oder zwei Knotenpunkten angreifen kann, wodurch der Kräfteplan etwas einfacher wird. Diese Bemerkung gilt auch, wenn der Bogen einen geraden Obergurt besitzt, die Bremskraft jedoch durch geeignete Horizontalverstrebungen bloss auf ein oder zwei Punkte übertragen wird. —

Der Einfachheit wegen wird man sich vielfach damit begnügen, zu ermitteln, welche Wirkung ein die ganze Spannweite bedeckender Bahnzug auf die einzelnen Stäbe ausübt. Man berechnet in diesem Falle das Gewicht des Bahnzuges und hieraus die gesamte Bremskraft. Hierauf verteilt man diese gleichförmig über die Knotenpunkte der obern Gurtung, bestimmt die beiden Auflagerdrücke und zeichnet einen Cremona-Plan. Dieses Verfahren ist nicht genau, aber wesentlich kürzer als das frühere.

Wie sich der Cremona-Plan gestaltet, zeigt die Fig. 27. Angenommen, das Gewicht des ganzen Bahnzuges betrage 210 t, und der Reibungskoeffizient $^1/_6$, so wird die gesamte Bremskraft gleich 35 t. Auf jeden Knotenpunkt entfallen somit 5 t. Dass die Bremskraft, genau genommen, oberhalb des Bogens wirkt, wird hier vernachlässigt. Die Mittelkraft der linksseitigen Kräfte wird nun parallel zu EA und EB zerlegt, die Mittelkraft der rechtsseitigen parallel zu $E'A$ und $E'B$. Die auf den Punkt 8 treffende Kraft wird halb zur linken, halb zur rechten Seite gerechnet. Die Vereinigung der einzelnen Auflagerdrücke führt zu den Gesamtdrücken, worauf die Zerlegung nach Cremona keiner Schwierigkeit mehr begegnet.

14. Schiefe Belastungen.

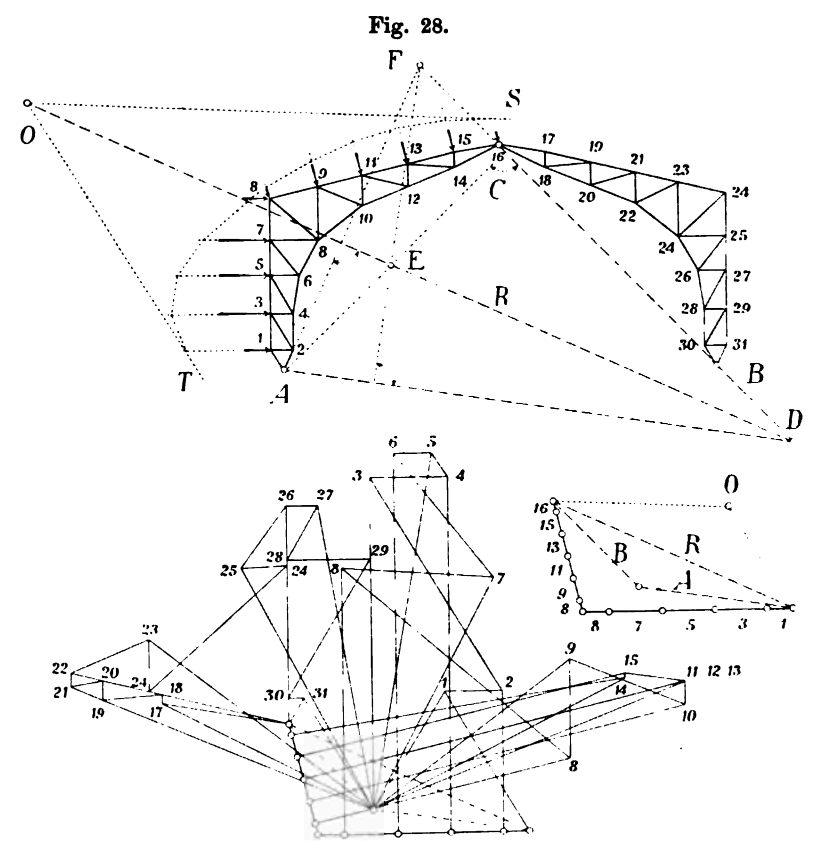
Winddruck.

Schiefe Belastungen entstehen bei Dachstühlen durch die Wirkung des Windes. In der Regel lässt sich der Einfluss des Windes auf die Stabkräfte durch einen einzigen Cremona-Plan bestimmen. Die Fig. 28 gibt hierfür ein Beispiel. Die Windkräfte 1 bis C werden zuerst zu einem Krafteck vereinigt. Dann zeichnet man mit einem beliebig gewählten Pole O das Seileck ST und bestimmt damit die Lage der Mittelkraft R. Hierauf bringt man die Kraft R mit der Linie BC zum Schnitt, verbindet den Schnittpunkt D mit A und zerlegt R parallel zu DC und zu DA. Damit sind die äussern Kräfte bestimmt, und der Cremona-Plan kann in gewohnter Weise gezeichnet werden.

Sollte der Punkt D über den Blattrand hinausfallen, so wendet man eines der bekannten Hilfsverfahren an, um die Richtung von DA zu finden. Man zieht z. B. von A aus eine Senkrechte AE zu CD und eine Senkrechte AF zu R. Dann steht nach dem Satze, dass sich die Höhenlote eines Dreiecks im gleichen Punkte schneiden müssen, die gesuchte Linie AD senkrecht auf der Linie EF.

Besitzt der Bogen vollwandige Teile (z. B. in der Nähe der Gelenke), so berechnet man daselbst die Spannungen nach der Kernformel (vgl. S. 267). Angenommen, der Bogen sei von C bis zum Angriffspunkte der Kraft 15 vollwandig, so setzt man zuerst die

Fig. 28.



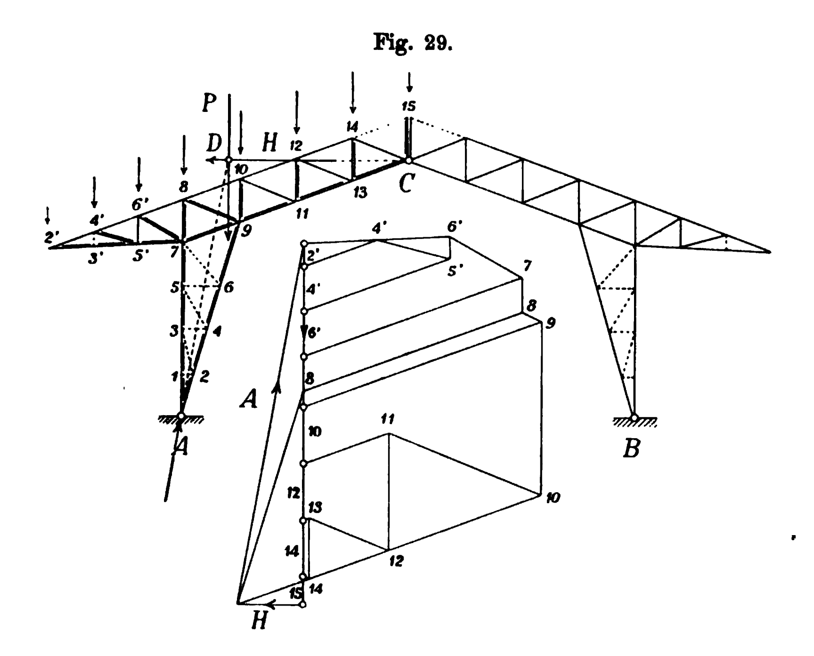
Kräfte B und 16 zusammen, bestimmt im Querschnitte 14 15 die Kernpunkte und wendet zur Berechnung der Spannungen den Satz vom Kernmoment an (vgl. Teil I, S. 56).

Ein zweites Beispiel ist in den Fig. 29—30 behandelt worden. Der Dachstuhl besitzt hier überhängende Teile. Den Stab 15 C muss man sich gespalten denken, weil sonst das Scheitelgelenk nicht zur Wirkung käme und der Träger ein Bogen mit zwei Gelenken wäre.

Die Fig. 29 enthält die Bestimmung der Stabkräfte für Eigengewicht. P ist die Mittelkraft sämtlicher Eigengewichtslasten der

linken Hälfte des Dachstuhls. Sie wird parallel zu DC und DA in zwei Teilkräfte A und H zerlegt. Hierauf beginnt die Zerlegung

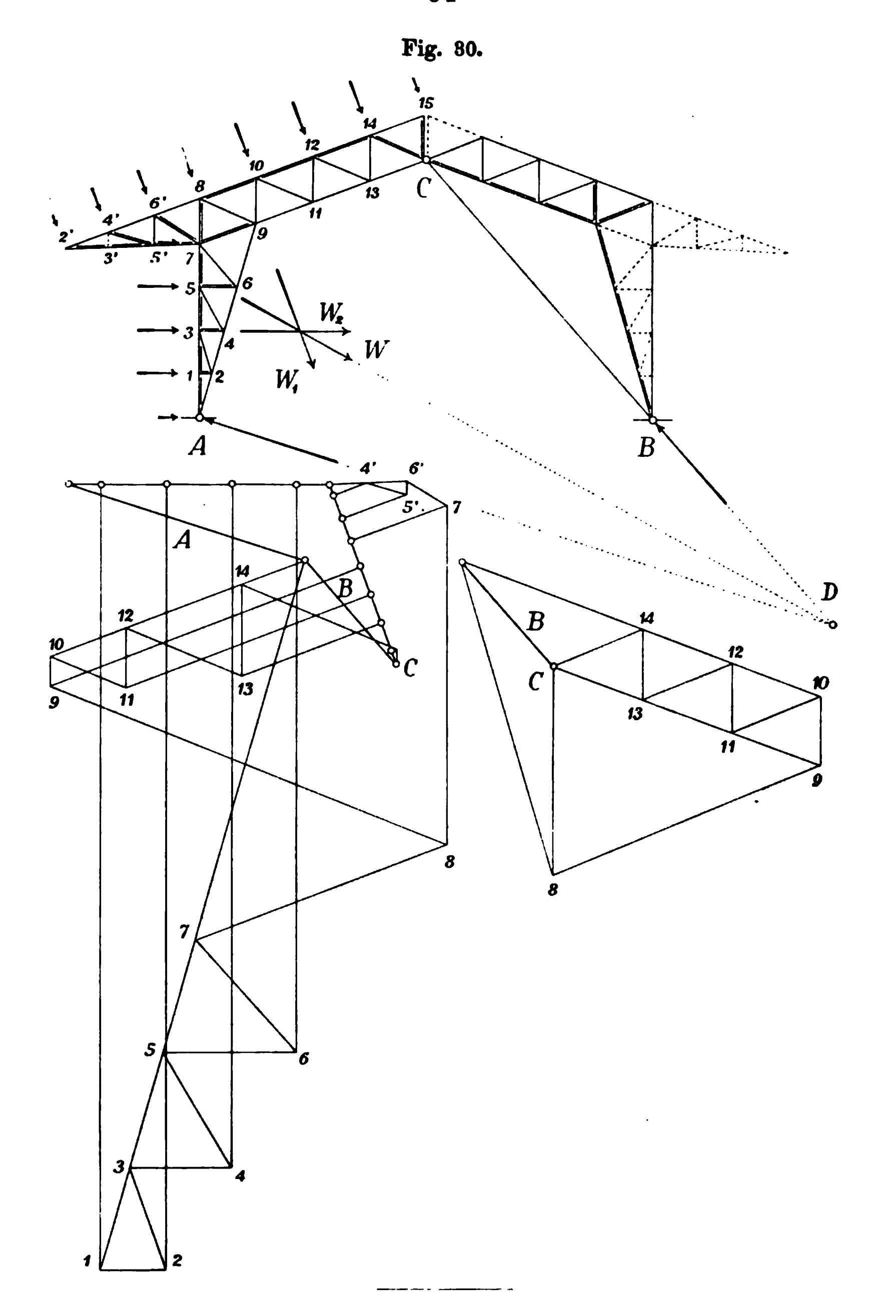
Fig. 29.



nach Cremonas Verfahren. In der Ansichtsfigur des Trägers bedeuten Doppelstriche Druckkräfte, einfache Striche Zugkräfte. Stäbe, die spannungslos bleiben, sind punktiert gezeichnet.

In der Fig. 30 wurden die Windkräfte bestimmt. Zuerst vereinigt man die schiefen Winddrücke in W_1 und die wagrechten in W_2. Die Mittelkraft von W_1 und W_2 ist W. Diese Kraft schneidet die Linie BC in D; sie wird parallel zu DA und zu DB zerlegt. Hierauf beginnt man mit der Bestimmung der Stabkräfte nach Cremona. Der grösseren Deutlichkeit halber haben wir zwei Cremona-Pläne gezeichnet, den einen für die linke, den andern für die rechte Hälfte des Dachstuhls. Auch hier bezeichnet ein Doppelstrich, dass der Stab auf Druck beansprucht wird, und eine punktierte Linie, dass der Stab spannungslos bleibt.

Fig. 80.



15
14
12
10
8
6'
4'
2'
3'
5'
7
9
11
13
C
5
6
3
4
1
2
W2
W
W1
A
B
4'
6'
5'
7
A
14
B
12
10
9
11
13
C
D
B
14
12
C
10
13
11
9
8
8
7
5
6
3
4
1
2

Zweites Kapitel.

Bogen mit zwei Gelenken.

15. Formänderungswinkel und elastische Gewichte.

Bogen mit zwei Gelenken sind einfach statisch unbestimmt, sie lassen sich mit Hilfe der Gleichgewichtsgesetze allein nicht berechnen, sondern verlangen zu ihrer statischen Berechnung noch eine Bedingung aus den Gesetzen der elastischen Formänderungen.

Der Bogen der Fig. 34 (S. 60) besitzt z. B. 18 Knotenpunkte, 33 Stäbe und 4 Auflagerbahnen (= zwei feste Auflager); es ist daher $s + a - 2k = 33 + 4 - 2.18 = 1$. Vollwandige Teile hat man, wenn sie dreieckig sind mit drei Punkten und drei Stäben, wenn sie viereckig sind mit vier Punkten und fünf Stäben in Rechnung zu ziehen.

Die Bedingung, die wir den Gesetzen der Formänderungen entnehmen, lautet, abgesehen von besonderen Fällen, dahin, dass die Länge der Bogensehne AB keine Änderung erleide. Um die Änderungen, welche die Bogensehne hinsichtlich ihrer Länge erfährt, berechnen zu können, müssen wir zunächst einen Ausdruck für den Formänderungswinkel ableiten.

Der Stab VW eines Fachwerkbogens stehe unter der Wirkung der äusseren Kraft R. Nach der in Fig. 31 eingeschriebenen Bezeichnung ist die Stabkraft (vgl. Teil II, Nr. 6)

$$S = \frac{Rr}{a}.$$

Unter dem Einflusse der Kraft S verlängert sich der Stab um die Strecke

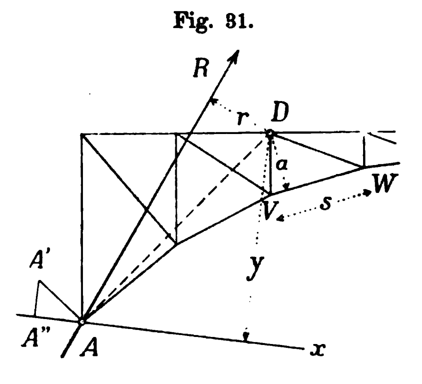
$$\Delta s = \frac{Ss}{EF},$$

worin F seine Querschnittsfläche und E den Elastizitätsmodul bezeichnet. Infolge dieser Verlängerung öffnet sich der Winkel VDW um den Betrag

$$\Delta \delta = \frac{\Delta s}{a} = \frac{Rrs}{EFa^2}.$$

Der nämliche Ausdruck ergibt sich, wenn man die Theorie der virtuellen Arbeiten anwendet. (Vgl. Teil III, S. 253.) Die Arbeit von R ist $R.r.\Delta\delta$, die Arbeit von S ist $\frac{S^2 s}{EF}$, woraus sich durch Gleichsetzung und durch Einführung des Wertes von S obiger Ausdruck für den Formänderungswinkel ergibt.

Fig. 31.



In diesem Ausdrucke hängen die Grössen s, E, F und a bloss von den Abmessungen des Stabes und vom Baustoffe ab; von den auftretenden Kräften sind sie unabhängig. Fasst man diese Grössen zusammen und setzt

$$\Delta g = \frac{s}{EFa^2},$$

so wird kürzer

$$\Delta\delta = R.r.\Delta g.$$

Wir nennen Δg das „elastische Gewicht" des Stabes. Denkt man sich dieses Gewicht im Punkte D konzentriert, so ist der Formänderungswinkel gleich der Kraft R mal dem statischen Momente des Gewichtes, bezogen auf die Kraftrichtung. (Vgl. Teil II, S. 115 u. Teil III, S. 261.)

Denkt man sich das Fachwerk rechts von D festgehalten, so vollzieht der linke Fachwerkteil infolge der Verlängerung des Stabes VW eine Drehung um den Punkt D. Der Punkt A gelangt hierbei nach A', wobei $AA' = AD.\Delta\delta$. In Anbetracht der Kleinheit des Winkels $\Delta\delta$ darf man an Stelle des Kreisbogens AA' die Tangente setzen.

Legt man durch A eine beliebig gerichtete Achse Ax und projiziert darauf die Verschiebung AA', so verhält sich $AA'' : AA' = y : AD$, oder

$$AA'' = y.\Delta\delta = R.r.y.\Delta g.$$

Die Verschiebung des Punktes A längs einer beliebigen Achse ist daher gleich der Kraft R mal dem Zentrifugalmomente des im Drehpunkte konzentrierten Gewichtes Δg, bezogen auf die Kraft- und die Verschiebungsrichtung. (Vgl. Teil II, S. 116 u. Teil III, S. 261.)

Obige Gleichung ergibt sich auch aus Betrachtungen über die virtuellen Arbeiten. Lässt man die Kraft X in der Richtung Ax wirken, so ist ihre Arbeit gleich $X . A A''$ und die Arbeit der Stabkraft gleich $\frac{S S_x s}{E F}$, woraus, wenn man $S = \frac{R r}{a}$ und $S_x = \frac{X y}{a}$ setzt, ebenfalls obige Gleichung folgt.

Bei der statischen Berechnung von Bogen mit zwei Gelenken hat man die Verschiebung des Punktes A stets in der Richtung der Bogensehne zu untersuchen; y ist daher gleich der Entfernung des Drehpunktes von der Bogensehne, somit ebenfalls eine von den Kräften unabhängige, konstante Grösse. Dieser Umstand führt dazu, das Produkt $y . \Delta g$ als einheitliche Grösse aufzufassen. Wir nennen es ebenfalls „elastisches Gewicht" und unterscheiden in der Folge

elastische Gewichte erster Ordnung: $\Delta g = \frac{s}{E F a^2}$,

elastische Gewichte zweiter Ordnung: $\Delta w = y . \Delta g = \frac{s y}{E F a^2}$.

Die Verschiebung des Punktes A lässt sich nun setzen

$$A A'' = R . r . \Delta w,$$

oder: Die Verschiebung des Punktes A in der Richtung der Bogensehne ist gleich der Kraft R mal dem statischen Momente des elastischen Gewichtes zweiter Ordnung, bezogen auf die Kraftrichtung.

Geht die Kraft R durch die beiden Auflager, so wird $\Delta \delta = R . y . \Delta g = \mathrm{R} . \Delta w$; somit: Für eine in der Bogensehne wirkende Kraft ist der Formänderungswinkel gleich der Kraft mal dem elastischen Gewichte zweiter Ordnung.

In der Fig. 31 haben wir einen unteren Gurtstab in Betracht gezogen. Obige Ausdrücke für den Formänderungswinkel und für die Verschiebung des Bogenendpunktes gelten aber auch, wenn ein oberer Gurtstab oder eine Strebe ins Auge gefasst wird. Bei der Gurtung ist D der dem Stabe gegenüberliegende Knotenpunkt, bei der Strebe der Schnittpunkt der beiden Gurtstäbe, die gleichzeitig mit der Strebe vom Querschnitte getroffen werden.

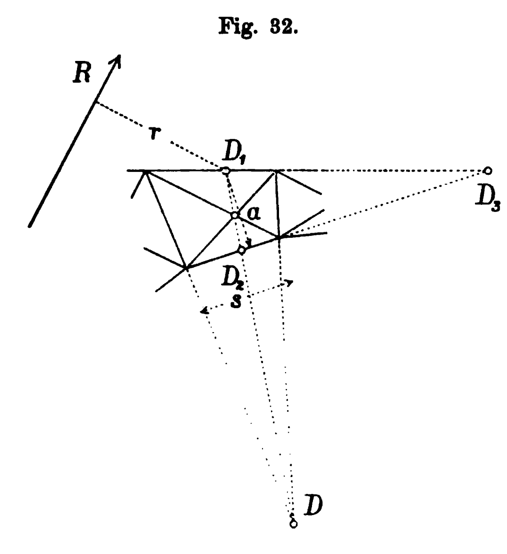
Besitzt der Bogen doppelten Strebenzug (Fig. 32), so wird er mehrfach statisch unbestimmt. Mit jeder neuen Strebe nimmt die Zahl der Unbestimmtheiten um eins zu. Solche Bogen genau zu berechnen, ist eine höchst umständliche Aufgabe; man beschränkt sich daher auf einen Annäherungsweg.

Zunächst nimmt man die Querschnittsfläche der Pfosten unendlich

gross an; mit andern Worten, man vernachlässigt ihre elastischen Verlängerungen, eine Annahme, die gestattet ist, weil die in den Pfosten auftretenden Spannungen sehr gering sind.

Sodann zieht man durch den Schnittpunkt D der beiden Pfosten und durch den Kreuzungspunkt der beiden Streben die Linie $D_1 D_2$ und betrachtet die Punkte D_1 und D_2 als die Drehpunkte der Gurtungsstäbe. Für den untern Gurtstab ist demnach $S = \frac{R.r}{a}$. Wie im II. Teil, S. 141, nachgewiesen worden, bekommt man für S in diesem Falle dieselbe Kraft, die man erhält, wenn man annimmt, die Kraft R verteile sich zu gleichen Hälften auf die beiden Strebenzüge. Wenn auch diese Annahme mit der Wirklichkeit nicht genau übereinstimmt, so ist sie doch genau genug, um als Grundlage zur Berechnung des Formänderungswinkels zu dienen. Lezterer ergibt sich also für die untere Gurtung, wie früher,

Fig. 32.



$$\Delta\delta = \frac{R r s}{E F a^2} = R . r . \Delta g,$$

und die Verschiebung des Punktes A längs der Achse $A x$ ist, wenn man $y . \Delta g$ durch Δw ersetzt,

$$A A' = R . r . \Delta w.$$

In derselben Weise wird der Formänderungswinkel für den obern Gurtstab gefunden; hier ist D_3 der Drehpunkt.

Um drittens den Formänderungswinkel für die beiden Streben zu erhalten, die beide ihren Drehpunkt in D_2 haben, berechnet man für jede das elastische Gewicht $\Delta g = \frac{s}{E F a^2}$, worin, wie früher, s die Stablänge, F ihre Querschnittsfläche und a die Entfernung der Strebe von D_2 bedeutet. Hierauf bildet man aus beiden Gewichten Δg_1 und Δg_2 das arithmetische Mittel und hat dann, da die Kraft R sich auf beide Streben verteilt,

$$\Delta\delta = \tfrac{1}{2} R . r . \frac{\Delta g_1 + \Delta g_2}{2},$$

mit anderen Worten: Man berechnet das elastische Gewicht für jede der beiden Streben und verlegt den vierten Teil der Summe in den Punkt D_2.

Übrigens sei schon hier bemerkt, dass die elastischen Formänderungen der Streben bei der statischen Berechnung der Bogenträger ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden dürfen. (Vgl. Nr. 39.)

Ist der Bogen vollwandig, so zerlegt man ihn in Elemente von der Länge Δs (vgl. Fig. 30). Dann ist der Formänderungswinkel, wenn J das Trägheitsmoment des Querschnittes bezeichnet,

$$\Delta \delta = \frac{R r \Delta s}{E J}.$$

Denn die virtuelle Arbeit der äussern Kraft ist $R r \Delta \delta$, die Arbeit der innern $\frac{M^2 . \Delta s}{E J}$ (vgl. Teil III, S. 253), woraus für $M = R . r$ obiger Ausdruck folgt (Fig. 33).

Der Drehpunkt, d. h. der Punkt, um den sich der eine Endquerschnitt des Elementes gegenüber dem andern dreht, ist hier der Antipol der Kraft R hinsichtlich der Elastizitätsellipse des Elementes (vgl. Teil I, S. 153). Bezeichnet man den Abstand des Drehpunktes von der Bogensehne mit y und nennt

Fig. 33.

$$\Delta w = \frac{y . \Delta s}{E J}$$

das elastische Gewicht zweiter Ordnung, so ergeben sich wie beim Fachwerkbogen die Beziehungen:

Die Verschiebung des Punktes A in der Richtung der Bogensehne ist gleich der Kraft R mal dem statischen Momente des elastischen Gewichtes zweiter Ordnung, bezogen auf die Kraftrichtung, und:

Für eine in der Bogensehne wirkende Kraft ist der Formänderungswinkel gleich der Kraft mal dem elastischen Gewichte zweiter Ordnung.

Die Halbmesser der Elastizitätsellipse sind

$$i_1 = \sqrt{{}^1/_{12} . \Delta s^2 + \frac{\varkappa E J}{G F}}$$

und

$$i_2 = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

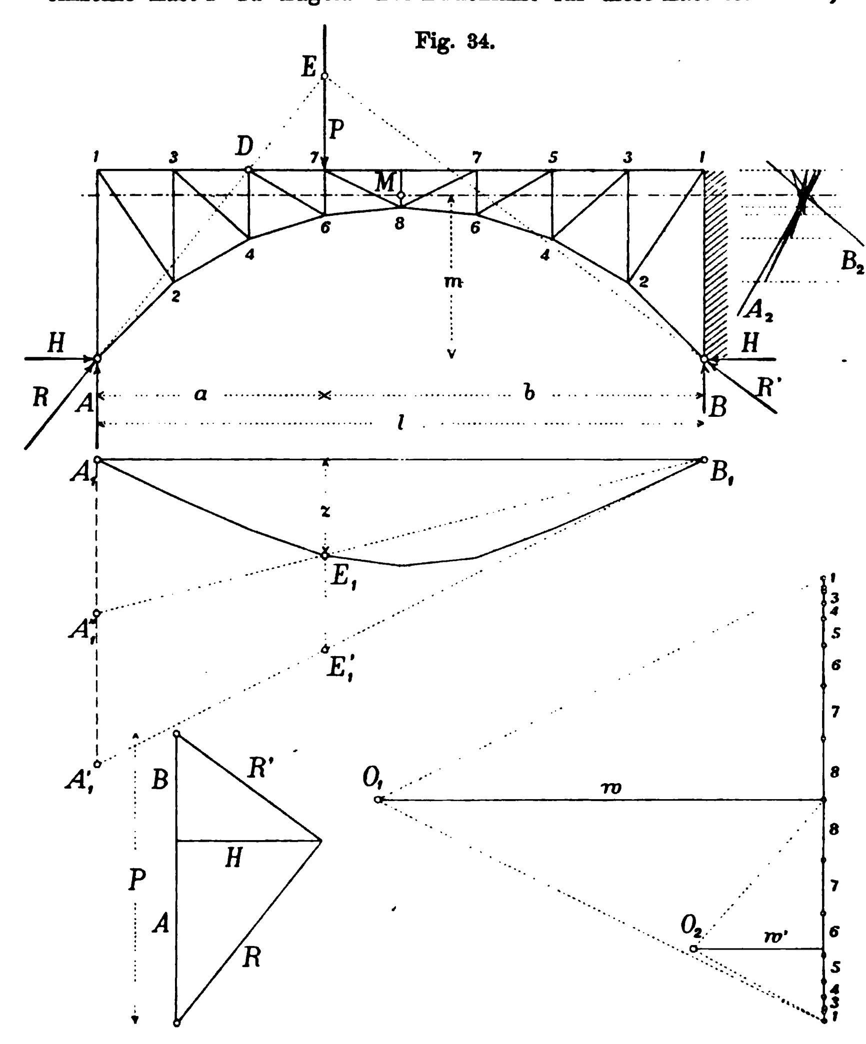
(vgl. Teil III, S. 262). Gewöhnlich vernachlässigt man den Einfluss der Scherspannungen und hat dann einfacher

$$i_1 = \frac{\Delta s}{\sqrt{12}}.$$

16. Einflusslinie für den Horizontalschub.

Der symmetrisch gebaute Bogen AB (Fig. 34) habe eine einzelne Last P zu tragen. Die Drucklinie für diese Last ist AEB,

Fig. 34.



die wie jede andre Drucklinie durch die Gelenkpunkte A und B gehen muss (vgl. S. 3). Der Punkt E ist vorläufig unbekannt.

Zerlegt man P parallel zu EA und zu EB, so bekommt man die beiden Auflagerdrücke R und R'. Zerlegt man ferner die Kraft R in eine wagrechte und eine senkrechte Teilkraft, so findet man die Kräfte H und A; ebenso erhält man durch Zerlegung von R' die Kräfte H und B. Die beiden in der Bogensehne wirkenden Kräfte H halten sich gegenseitig im Gleichgewichte, ebenso stehen die Kräfte P, A und B im Gleichgewicht. Daraus folgt, dass die Kräfte A und B nichts anderes sind, als die Auflagerdrücke, die man erhält, wenn man den Träger als einen Balken ansieht. Es ist daher

$$A = \frac{P.b}{l} \quad \text{und} \quad B = \frac{P.a}{l}.$$

Der Horizontalschub H ist zunächst unbekannt, er lässt sich nur mittels der Gesetze der elastischen Formänderungen bestimmen. Wir verlangen nun, dass die Länge der Bogensehne AB unverändert bleibe.

Zu diesem Zwecke denken wir uns den Bogen am rechtsseitigen Ende festgehalten, am linken Ende frei schwebend und fragen, wie sich der Punkt A unter der Wirkung der Kräfte P, A und H wagrecht verschiebt. Da die Bogensehne unveränderlich ist, so muss die Summe dieser Verschiebungen null sein.

Um die Verschiebungen des Punktes A zu finden, berechnen wir für sämtliche Gurtungsstäbe die elastischen Gewichte zweiter Ordnung

$$\Delta w = \frac{s y}{E F a^2},$$

betrachten sie als Kräfte, die in den Drehpunkten der Stäbe angreifen, und setzen sie durch zwei Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ zusammen.

Im ersten Seileck lassen wir die Gewichte lotrecht wirken; das Krafteck ist in der Fig. 34 rechts unten gezeichnet. Die Polweite machen wir gleich der Summe w sämtlicher Gewichte (Pol O_1). Das zweite Seileck kann der Symmetrie wegen auf die Hälfte beschränkt werden; die Polweite wählt man nach Belieben (Pol O_2). Die Seiten des zweiten Seilecks stehen senkrecht auf den Strahlen aus O_2, weil die Kräfte hier horizontal wirken, während sie im Krafteck vertikal aufgetragen wurden. Verlängert man die äussersten

Seiten des zweiten Seileckes bis zu ihrem Schnittpunkte und zieht durch denselben eine wagrechte Linie, so findet man den Schwerpunkt M sämtlicher Δw. Sein Abstand von der Bogensehne sei m.

Wir machen nun Gebrauch von dem in der vorigen Nummer abgeleiteten Satze: Die Verlängerung der Bogensehne ist gleich der wirksamen Kraft mal dem statischen Momente der elastischen Gewichte zweiter Ordnung, bezogen auf die Kraftrichtung. Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Verschiebungen des Punktes A leicht ermitteln.

Die Kraft P beeinflusst nur die Stäbe zwischen ihr und dem Auflager B. Das statische Moment der Gewichte dieser Stäbe ist nach der Theorie des Seilpolygons gleich der Polweite w mal dem lotrechten Abschnitte $E_1 E_1'$ der einschliessenden Seilseiten; hiernach ergibt sich die Verschiebung des Punktes A gleich

$$- P . w . E_1 E_1' .$$

Das Minuszeichen ist zu nehmen, weil die Kraft P in negativem Sinne dreht. In gleicher Weise findet man die durch die Kraft A bewirkte Verschiebung gleich

$$+ A . w . A_1 A_1' .$$

Hier müssen wir das Pluszeichen setzen, da A im entgegengesetzten, positiven Sinne dreht. Um die Wirkung der Kraft H zu erhalten, beachten wir, dass M der Schwerpunkt sämtlicher Gewichte ist; das statische Moment der Gewichte bezogen auf die Kraftrichtung ist daher gleich $w . m$, folglich die Wirkung von H (in negativem Sinne) gleich

$$- H . w . m .$$

Die Summe der Verschiebungen muss null sein, also

$$O = - P . w . E_1 E_1' + A . w . A_1 A_1' - H . w . m .$$

Ersetzt man A durch $\frac{P . b}{l}$, so wird

$$H . m = P . \left(\frac{b}{l} A_1 A_1' - E_1 E_1' \right) .$$

Der Klammerausdruck ist aber, wie man leicht erkennt, gleich der Ordinate z des Seilecks $A_1 B_1$, somit

$$H = \frac{P . z}{m} .$$

Wandert die Last P von einem Auflager zum andern, so be-

schreibt z die Fläche zwischen dem Seileck $A_1 B_1$ und seiner Schlusslinie; diese Fläche ist daher die Einflussfläche für den Horizontalschub H, die sogenannte „H-Fläche“. —

Zu demselben Ergebnisse gelangt man durch Betrachtungen, die sich auf den Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderungen stützen (vgl. Teil III, S. 258). Nach diesem Satze ist die virtuelle Arbeit der Kraft P, während H zur Wirkung gelangt, gleich der virtuellen Arbeit von H, während P auf den Bogen einwirkt. Hebt sich der Angriffspunkt von P unter der Wirkung von H um p und verlängert sich die Bogensehne unter der Wirkung von P um h, so ist daher $P.p = H.h$.

Nun ist das Seileck $A_1 B_1$ nichts anderes als die Durchbiegungslinie des Bogens unter der Wirkung von H; denn die Formänderungswinkel sind nach früher (S. 57) gleich $H.\Delta w$, und wenn man diese Werte als lotrechte Kräfte ansieht und durch ein Seileck verbindet, so stellt dieses die Biegungslinie des Bogens dar (vgl. Teil II, S. 110). Da die Polweite gleich w ist, so folgt $p = H.w.z$, oder, wenn man $H = \frac{Pp}{h}$ setzt, $h = P.w.z$. Die Verschiebung h muss der Horizontalschub rückgängig machen. Daraus ergibt sich nach früher die Beziehung $h = H.w.m$, woraus wie oben folgt

$$H = \frac{P.z}{m}.$$

Hiermit wird zugleich der Satz bestätigt, der im III. Teil, Seite 269, in allgemeinster Form ausgesprochen ist: „Man denkt sich, die Kraft K, deren Einflusslinie gesucht wird, gelange zur Wirkung und zeichnet die Linie, in welche die Fahrbahn hierbei übergeht. Nach dem Satze von der Gegenseitigkeit der Formänderungen stellen die Ordinaten der Biegungslinie den Einfluss einer wandernden Last P dar.“ —

Beim Zeichnen der beiden Seilecke haben wir bloss die Gurtungsstäbe in Betracht gezogen und die Streben ausser acht gelassen. Diese Vernachlässigung der Füllungsstäbe ist allgemein üblich und in der Regel gestattet. Will man auf die Streben Rücksicht nehmen, so wird die Arbeit bedeutend erschwert, und eine Vergleichung zeigt, dass sich die Schlussergebnisse nur wenig ändern.

In dem Ausdrucke für H, sowie in allen späteren Betrachtungen spielt die Länge m eine wichtige Rolle. Es empfiehlt sich, sie so

genau als möglich zu bestimmen und neben der Zeichnung auch die Rechnung anzuwenden. Hierzu dient die Formel

$$m = \frac{\Sigma(\Delta w \cdot y)}{\Sigma(\Delta w)}.$$

Bei der Berechnung der elastischen Gewichte setzt man gewöhnlich den Elastizitätsmodul E gleich eins. Diese Vereinfachung ist erlaubt, weil die Grösse von E auf die Stabkräfte keinen Einfluss ausübt. Einzig bei der Berechnung der Temperaturspannungen muss man auf den Elastizitätsmodul Rücksicht nehmen (Nr. 21); doch kann dies leicht nachträglich geschehen.

Um die Berechnung der Δw übersichtlich zu gestalten, schreibt man die einzelnen Grössen a, F, s und y am besten in eine Tabelle ein (Nr. 25) und berechnet mit dem Rechenschieber zuerst das Produkt Fa^2 und hierauf mit einer zweiten Stellung den Bruch $\frac{sy}{Fa^2}$. Die Längen a, s und y greift man gewöhnlich in der Zeichnung ab und schreibt sie in Metern ein; kleinere Ungenauigkeiten haben auf das Schlussergebnis wenig Einfluss. Die F misst man in cm². Ist der Bogen symmetrisch, so beschränkt man die Berechnung auf den halben Bogen, darf aber nicht vergessen, am Schlusse mit 2 zu multiplizieren, wenn man das ganze w haben will. Der Massstab, in welchem man die Gewichte als Kräfte aufträgt, ist ganz beliebig.

Die Polweite für das erste Seileck macht man am besten gleich w. Es steht jedoch nichts im Wege, sie anders zu wählen, z. B. gleich $\frac{1}{2} w$; dann muss aber z halbiert werden, und der Bogenschub ist $H = \frac{Pz}{2m}$.

17. Kämpferdrucklinie und ungünstigste Belastungen.

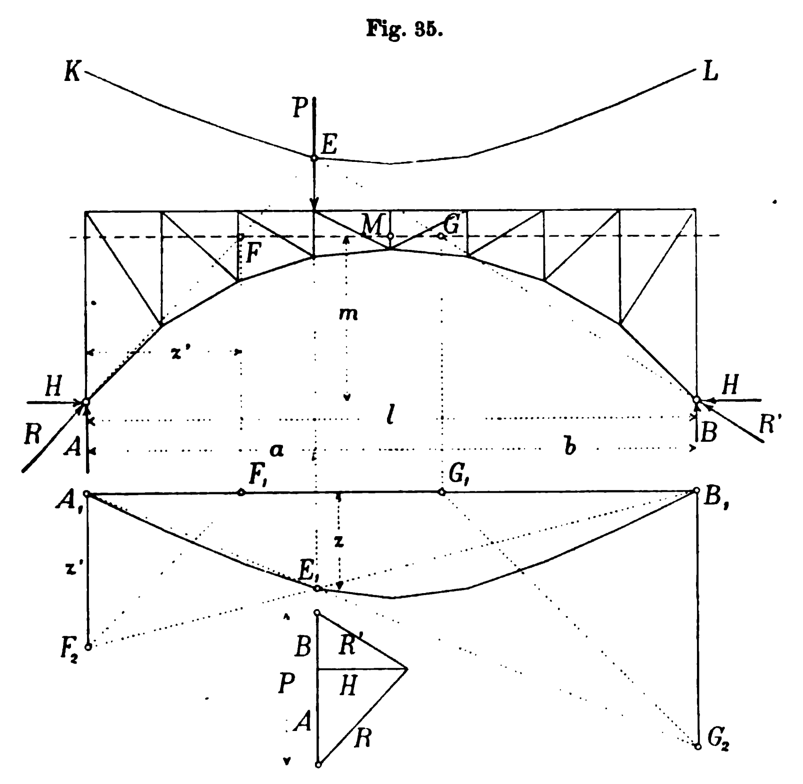
Ist der Horizontalschub bestimmt, so lässt sich die Drucklinie für die Last P folgendermassen zeichnen. Nach den Betrachtungen der vorigen Nummer ist $A = \frac{Pb}{l}$ und $H = \frac{Pz}{m}$; es verhält sich somit

$$A : H = \frac{b}{l} : \frac{z}{m} = m : \frac{zl}{b}.$$

Man findet daher die Richtung von R, wenn man aus m und $\frac{z\,l}{b}$ ein rechtwinkliges Dreieck bildet und die Hypotenuse zieht.

Zieht man (Fig. 35) im Seileck $A_1\,B_1$ die Linie $B_1\,E_1\,F_2$, so ist $A_1\,F_2 = z' = \frac{z\,l}{b}$. Zieht man ferner die Linie $F_2\,F_1$ unter 45°, lotet F_1 hinauf nach F und verbindet F mit A, so ist $A\,F$ die Richtung des linksseitigen Auflagerdrucks. Vertauscht man die

Fig. 35.



linke Seite mit der rechten, so bekommt man auf demselben Wege den rechtsseitigen Druck. Die beiden Linien $A\,F$ und $B\,G$ müssen sich natürlich, wenn richtig gearbeitet wurde, auf der Richtungslinie von P schneiden.

Bewegt sich die Last P von einem Auflager zum andern, so beschreibt E eine Kurve $K\,L$, die „Kämpferdrucklinie“. Man bekommt diese Linie, indem man die Last P der Reihe nach über sämtlichen Pfosten aufstellt und die Zeichnung der Fig. 35 wieder-

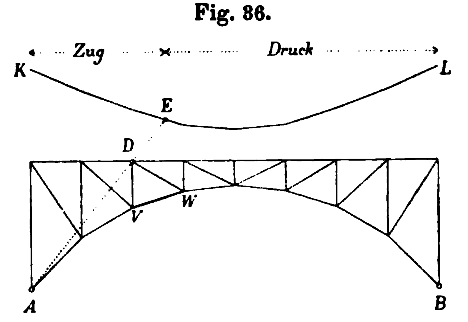
holt. Gelangt P an das Ende der Spannweite, so gelangt E_1 nach B_1 und die Strecke $A_1 F_2$ wird, da $B_1 F_2$ mit der letzten Seilseite zusammenfällt und da die Polweite w gleich der Summe aller Δw genommen wurde, gleich $^1/_2$ l. F gelangt daher nach M, und der Endpunkt L der Kämpferdrucklinie liegt auf der Linie AM.

Ist die Kämpferdrucklinie bekannt, so kann man mit ihrer Hilfe die Auflagerdrücke R und R' finden, ohne auf das Seileck zurückzugreifen. Man bringt die Richtungslinie der Last mit der Kämpferdrucklinie in E zum Schnitt, verbindet E mit A und B und zerlegt P parallel zu EA und EB.

Ferner lassen sich mittels der Kämpferdrucklinie die Grenzen der ungünstigsten Belastungen bestimmen.

Soll z. B. (Fig. 36) die ungünstigste Belastung für den Gurtstab VW bestimmt werden, so verbindet man A mit dem Drehpunkt D des Stabes; da, wo diese Verbindungslinie die Kämpferdrucklinie schneidet, liegt die Belastungsgrenze. Denn es ist leicht zu erkennen, dass die Drucklinie für eine links von E aufgelegte Last oberhalb des Punktes D vorbeigeht, während die Drucklinie für eine rechts von E befindliche Last unterhalb D verläuft. Im ersteren Falle dreht die äussere Kraft rechts, im letzteren links um den Punkt D, die Stabkraft ist in dem einen Falle eine Zugkraft, in dem andern eine Druckkraft. Eine Last, die genau über E steht, ruft in dem Stabe VW gar keine Spannung hervor, weil der Auflagerdruck in diesem Falle durch seinen Drehpunkt D geht.

Fig. 36.

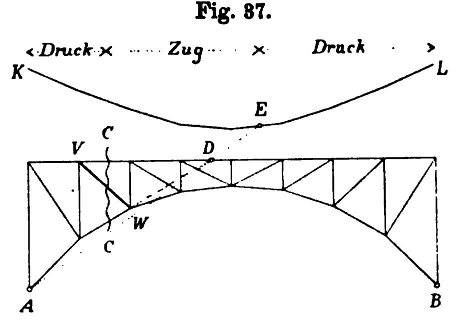


Die Fig. 37 zeigt, wie man die ungünstigste Belastung für die Strebe VW findet. Der Drehpunkt der Strebe liegt in D, eine Linie durch A und D schneidet die Kämpferdrucklinie in E; infolgedessen ist E eine Belastungsgrenze. Eine zweite findet sich in C, d. h. in dem Querschnitte, der die Strebe VW trifft. Man überzeugt sich bald, dass Lasten links von C die Strebe auf Druck beanspruchen; denn für solche Lasten bildet der rechtsseitige Auflagerdruck die äussere Kraft und dieser ruft ein negatives Drehmoment hervor. Für Lasten zwischen C und E ist der linksseitige

Auflagerdruck massgebend und dieser dreht um D in positivem Sinne. Lasten rechts von E ergeben wieder ein negatives Drehmoment. Negative Momente rufen aber im Stabe VW Druck, positive Zug hervor. Folglich erhalten wir die grösste Zugkraft, wenn wir den Bogen von C bis E belasten, die grösste Druckkraft, wenn wir von K bis C und von E bis L belasten.

Bei Balkenfachwerken werden bekanntlich die Gurtungen durch die volle, die Streben durch einseitige Belastung am stärksten beansprucht; für letztere bildet der betreffende Querschnitt eine Belastungsscheide, für erstere besteht diese Scheide nicht. Bei Bogenfachwerken tritt noch der Punkt E hinzu, so dass wir für die Gurtungen eine, für die Streben zwei Belastungsgrenzen finden.

Fig. 87.



Übrigens kommt es nicht selten vor, dass die Linie AD die Kämpferdrucklinie garnicht schneidet, so dass der Punkt E wegfällt; bei den Gurtungen ist in diesem Falle die volle Belastung des Bogens die ungünstigste, bei den Streben die einseitige bis zum Schnitt.

Das Zeichnen der Kämpferdrucklinie bildet die Grundlage für das ältere Verfahren zur Berechnung von Bogenträgern. (Nr. 28.) Das neuere Verfahren, welches mit Einflusslinien arbeitet, kann die Kämpferdrucklinie entbehren. Dennoch empfiehlt es sich, sie zu zeichnen, weil sie einen raschen Überblick über die Belastungsgesetze gestattet; auch kann sie häufig als Kontrollmittel gute Dienste leisten.

Da das Seileck $A_1 B_1$ nicht eine stetig gekrümmte Linie ist, sondern sich aus kurzen geraden Linien zusammensetzt, so wird auch die Kämpferdrucklinie keine stetige Kurve. Untersucht man die geometrische Entstehung der Linie näher, so erkennt man, dass sie als Schnitt projektivischer Strahlenbüschel aufgefasst werden kann. Das eine Büschel ist das der Lastlinien, das andere wird durch die Linien AF gebildet. Da nun das Seileck $A_1 B_1$ zwischen je zwei Pfosten geradlinig verläuft, so setzt sich die Kämpferdrucklinie aus kurzen Stücken von Kegelschnitten zusammen; es sind Hyperbeln, die alle durch die Punkte A und B gehen. Die einzelnen Stücke sind jedoch so kurz und so wenig gekrümmt, dass es wenig Zweck hat, sie zu zeichnen; man begnügt sich damit, die Punkte in den Pfostenlinien zu bestimmen und durch gerade Linien zu verbinden.

Was vorstehend für den Bogen mit geradem Obergurt erklärt worden ist, gilt in gleicher Weise von den Bogen mit gekrümmtem Obergurt. Auch Bogen mit doppeltem Strebenzug (Fig. 32) sind in derselben Weise zu behandeln; als Drehpunkte hat man hierbei diejenigen Punkte zu wählen, die den Kreuzungspunkten der Streben gegenüberliegen.

18. Einfluss des Eigengewichtes.

Mittels der Einflussfläche für den Horizontalschub lässt sich der Schub für eine beliebige Belastung leicht finden. Zunächst bestimmen wir den Bogenschub für das Eigengewicht des Bogens.

Die Eigenlast auf die Längeneinheit sei g, die Fachlänge f. Dann trifft auf jedes Fach oder, was dasselbe sagen will, auf jeden

Fig. 38.

Pfosten das Gewicht gf. Die beiden Endpfosten kann man sich mit $\frac{1}{2}gf$ belastet denken (Fig. 38). Nun findet man den Horizontalschub, indem man unter den Pfosten die Ordinaten z der Einflussfläche $A_1\,B_1$ mit dem Zirkel summiert und die Summe in die Formel

$$H_g = \frac{g f . \Sigma(z)}{m}$$

einsetzt. Ob man hierbei die Längen z und m im Massstab der Zeichnung misst, oder ihre natürlichen Längen einführt, ist gleichgültig.

Hierauf zeichnet man mit H_g und den neun Knotenlasten ein Krafteck und hierzu die (gestricht ausgezogene) Drucklinie AB. Mit Hilfe des Kraftecks und der Drucklinie lassen sich jetzt beliebige Stabkräfte berechnen. Man wendet dazu bei den Gurtungen am besten das Momenten-, bei den Streben das Schnittverfahren an. (Teil II, Nr. 6 u. 4.) In der Regel fragt man aber nach sämtlichen Stabkräften, und dann ist ein Cremona-Plan das einfachste Hilfsmittel. In der Fig. 38 ist dieser Plan im Anschluss an das Krafteck gezeichnet worden, der Symmetrie wegen kann man die Zeichnung auf die Hälfte beschränken.

Es empfiehlt sich, die letzte Gurtkraft des Cremona-Planes, also in unserm Beispiel die Kraft 6 8, auch nach dem Momentenverfahren zu berechnen; stimmt die berechnete Kraft mit der gezeichneten überein, so kann man sicher sein, dass auch die übrigen Kräfte richtig sind.

Da die Stablängen gegen die Auflager hin zunehmen, so ist das Eigengewicht gewöhnlich nicht gleichförmig verteilt. Bei grossen Spannweiten tut man gut, darauf Rücksicht zu nehmen. Man berechnet in diesem Falle das Gewicht P für jeden Pfosten besonders aus, misst die Ordinaten z mit dem Massstab und berechnet die Produkte $P . z$ zahlenmässig. Dann ist

$$H_g = \frac{\Sigma(P z)}{m}.$$

Oder man lässt die Kräfte P an den Endpunkten der z in wagrechtem Sinne angreifen und zeichnet dazu ein Seileck. Macht man hierbei die Polweite gleich m, so schneiden die äussersten Seilseiten auf der Geraden $A_1 B_1$ unmittelbar die Kraft H_g ab und zwar im gleichen Massstabe, in welchem die P aufgetragen wurden.

Der Beweis ist leicht aus Fig. 39 zu erkennen. Bezeichnet man die Abschnitte der Seiten des Seilecks auf $A_1 B_1$ mit h_g, so ergibt sich aus ähnlichen Dreiecken im Seil- und Kräftepolygon

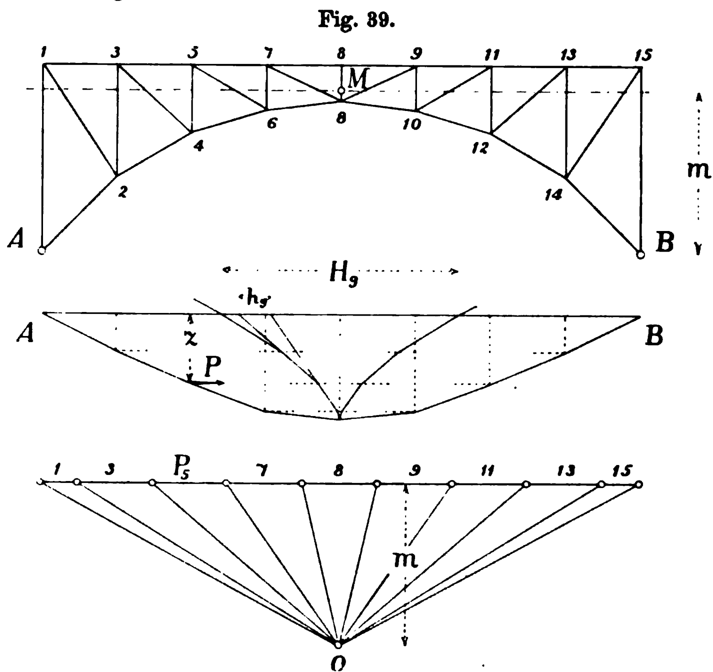
$$h : z = P : m,$$

und es ist demnach

$$\Sigma(h_g) = H_g = \frac{\Sigma(P z)}{m}.$$

Diese abweichende Berechnungsweise von H_g hat auch dann Platz zu greifen, wenn die Fachlängen ungleich sind, oder wenn, wie bei Bogen mit gekrümmtem Obergurt, nicht über jedem Knotenpunkte ein Fahrbahnpfosten steht, kurz, stets dann, wenn die einzelnen Lasten P ungleich sind.

Fig. 39.



Zeichnet man zur Bestimmung der Stabkräfte einen Cremona-Plan, so kann man streng genommen die Drucklinie weglassen. Anfänger tun jedoch gut, sie trotzdem zu zeichnen, da ihr Verlauf eine gewisse Kontrolle für die Richtigkeit der Arbeit bildet und grobe Fehler sofort erkennen lässt. Die Drucklinie muss nämlich im Scheitel stets näher an der obern Gurtung als an der untern liegen.

Ob die Stabkräfte Zug- oder Druckkräfte sind, lässt sich in üblicher Weise durch Einzeichnen der Pfeilrichtungen ermitteln; doch kann man sich diese Arbeit meist ersparen. Die Gurtungen werden stets auf Druck beansprucht; nur wenn die Drucklinie im Scheitel über den Obergurt hinaustritt, entsteht daselbst im Untergurt Zug. Die schiefen Streben werden auf Zug, die Pfosten auf Druck beansprucht. Ausnahmen kommen nur bei Bogen von aussergewöhnlicher Form vor.

Ist die Zahl der Stäbe sehr gross, so empfiehlt es sich, hie

und da eine Gurtungskraft mit Hilfe der Drucklinie zu berechnen; denn bei den zahlreichen langen Linien des Cremona-Planes entstehen leicht Ungenauigkeiten. (Man vergleiche übrigens die Ratschläge in Nummer 8 betreffend Erzielung grösserer Genauigkeit.)

Besitzt der Bogen doppelten Strebenzug, so wird der Cremona-Plan nach Anleitung der Nummer 36, Teil II, gezeichnet. Oder man zeichnet zwei Pläne, den einen mit fallenden, den andern mit steigenden Streben und nimmt von den Ergebnissen je den Mittelwert.

19. Einflusslinien für die Stabkräfte bei geradem Obergurt.

Um den Einfluss der zufälligen Last auf die Stabkräfte zu berechnen, verwendet man am besten Einflusslinien. Bei Strassenbrücken lässt sich zwar ein anderer Weg einschlagen; er ist in der Nummer 28 beschrieben, führt rascher zum Ziele, gewährt aber nicht dieselbe Übersichtlichkeit wie das Verfahren der Einflusslinien. Handelt es sich um eine Eisenbahnbrücke mit ihren unregelmässigen Einzellasten, so ist das letztere Verfahren einzig brauchbar. Über die Berechnung von Dachstühlen enthalten die Nummern 25 und 31 näheres.

Das Seileck $A_1 B_1$ (Fig. 40) ist, wie wir gesehen haben, die Einflusslinie für den Horizontalschub und zwar ist

$$H = \frac{P . z}{m},$$

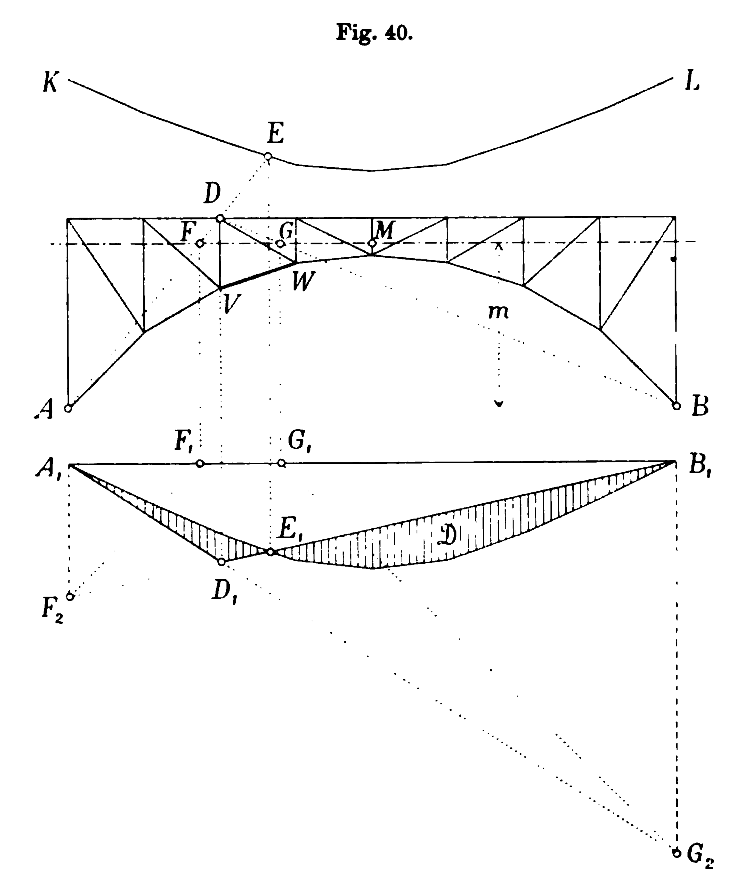
worin z die Ordinate der Einflussfläche und m die Ordinate des Schwerpunktes M, also eine konstante Länge bezeichnet. Aus dem Seileck $A_1 B_1$ lässt sich nun leicht die Einflussfläche für eine beliebige Stabkraft ableiten. Soll beispielsweise der Stab VW des Untergurtes (Fig. 40) berechnet werden, so verbindet man seinen Drehpunkt D mit A, schneidet damit in F die M-Linie an, lotet F hinunter nach F_1, zieht $F_1 F_2$ unter 45° und verbindet F_2 mit B_1. Hierauf lotet man D hinunter nach D_1 und zieht $A_1 D_1$.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Zerlegt man den Auflagerdruck R in die Teilkräfte A und H und den Druck R' in die Komponenten B und H (Fig. 34), so

wirken auf den Bogen die drei lotrechten Kräfte P, A, B und der Horizontalschub H. Erstere ergeben für den Punkt D ein positives Biegungsmoment und erzeugen daher im Stabe VW Zug. Der Horizontalschub dagegen ruft ein negatives Biegungsmoment hervor und beansprucht den Stab auf Druck. Die Stabkraft wird erhalten, wenn man beide Einflüsse voneinander abzieht.

Fig. 40.



Der Einfluss der lotrechten Kräfte wird für eine wandernde Last durch ein Dreieck $A_1 D_1 B_1$ dargestellt, dessen Spitze lotrecht unter D liegt. (Vgl. Teil III, S. 266). Die Grösse des Horizontalschubs wird durch die Fläche $A_1 E_1 B_1$ dargestellt. Die Einflussfläche für die gesuchte Stabkraft wird daher erhalten, wenn man die beiden Flächen voneinander abzieht.

Dass die Höhe des Dreiecks $A_1 D_1 B_1$ nach dem beschriebenen

Wege richtig gefunden wird, erkennt man daraus, dass eine Last über dem Nullpunkte E_1 den Stab VW nicht beeinflusst. Nach der Fig. 35 bekommt man nämlich den Auflagerdruck für eine über E stehende Last, wenn man $B_1 F_2$ zieht, $A_1 F_1$ gleich $A_1 F_2$ macht, F_1 nach F hinauflotet und F mit A verbindet. Diese Verbindungslinie geht aber jetzt durch den Drehpunkt des Stabes, somit ist die Stabkraft null.

Die Kämpferdrucklinie kann bei dieser Zeichnung als Kontrolle dienen. Verlängert man AD bis E, so muss E lotrecht über E_1 stehen.

Anstatt D mit A zu verbinden, kann man auch, indem man links mit rechts vertauscht, D mit B verbinden, den Schnittpunkt G hinunterloten, $G_1 G_2$ ziehen und G_2 mit A_1 verbinden. Man gelangt genau zu demselben Ergebnis wie oben. Manchmal mag es zweckmässig sein, beide Wege zugleich einzuschlagen.

Die Einflussfläche für einen Obergurtstab bekommt man auf dem nämlichen Wege.

Auch die Einflussfläche für eine Strebe wird nach denselben Regeln gezeichnet; doch tritt hier an Stelle des Dreieckes $A_1 D_1 B_1$ ein Viereck. (Vgl. Teil III, S. 266—269). In diesem Falle ist es stets ratsam, die Zeichnung sowohl von links wie von rechts her auszuführen.

Soll die Strebe VW (Fig. 41) berechnet werden, so bestimmt man zunächst deren Drehpunkt D und verbindet ihn mit A und B. Dann lotet man die Schnittpunkte F und G herunter, zieht $F_1 F_2$ und $G_1 G_2$, verbindet F_2 mit B_1 und G_2 mit A_1; schliesslich lotet man die Endpunkte der Strebe herunter und zieht $V_1 W_1$. Als Probe dient, dass der Schnittpunkt von $A_1 G_2$ und $B_1 F_2$ lotrecht unter D liegen muss. Ferner liegt der Nullpunkt E_1 (falls er überhaupt vorhanden ist) lotrecht unter dem Schnittpunkt der Linie BD mit der Kämpferdrucklinie.

In der nämlichen Weise wie die Streben werden die Pfosten behandelt. Die Fig. 42 erläutert den einzuschlagenden Weg für den Pfosten WW'. Man beachte, dass die Punkte V_1 und W_1 stets lotrecht unter denjenigen Knotenpunkten liegen, welche durch den den Pfosten treffenden Querschnitt getrennt werden. —

Das hiermit beschriebene Verfahren zum Zeichnen der Einflussflächen besitzt den grossen Vorteil, dass die Kurve $A_1 B_1$ nur einmal gezeichnet zu werden braucht, womit bedeutend Zeit gespart

Fig. 41.

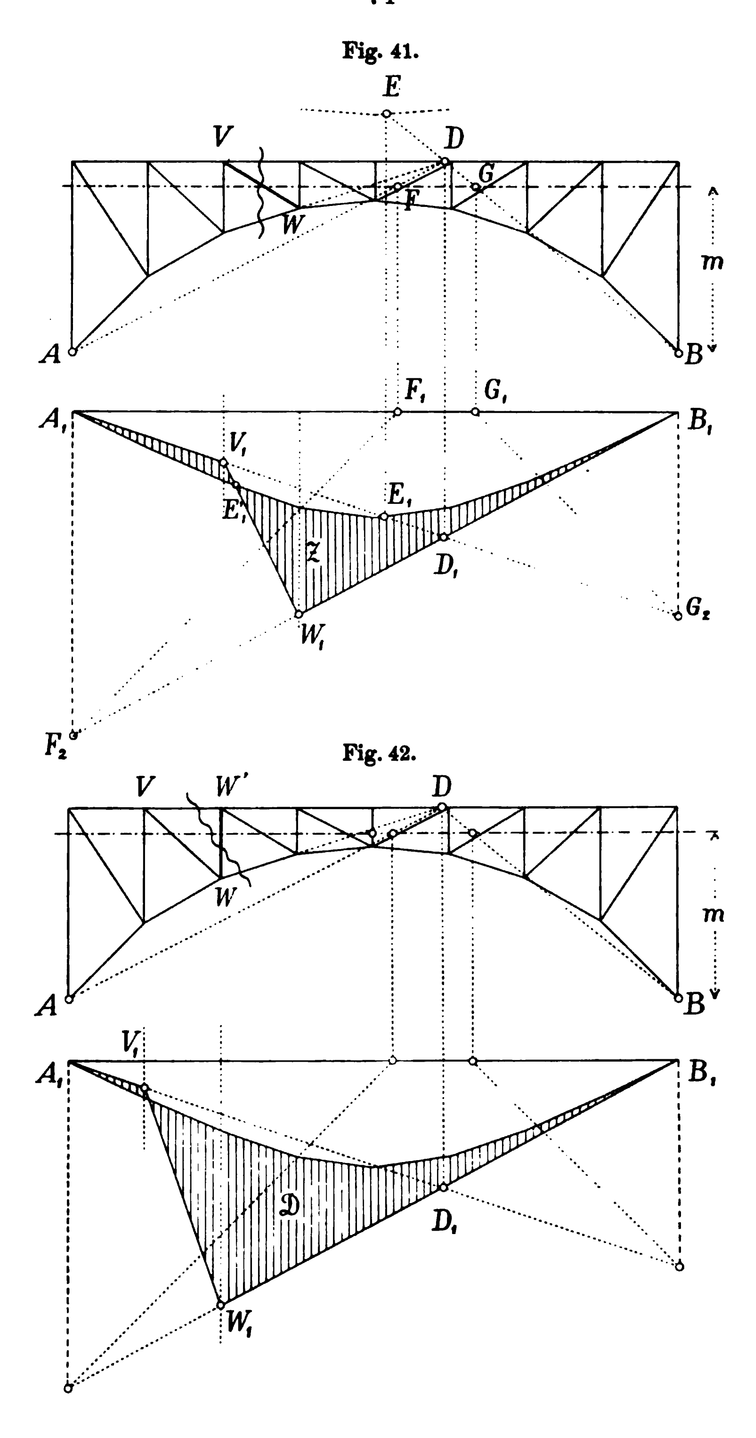
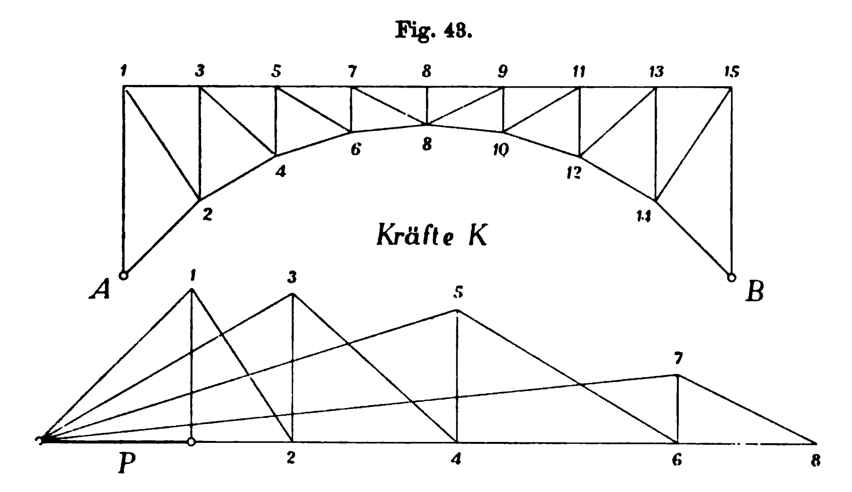

E
V
D
G
F
W
m
A
B
F_1
G_1
A_1
B_1
V_1
E_1
E'_1
Z
D_1
G_2
W_1
F_2
V
W'
D
W
m
A
B
V_1
A_1
B_1
D
D_1
W_1

Fig. 42.

wird. Dafür aber bekommt nun jede Einflussfläche einen andern Massstab.

Um diesen Massstab zu finden, verfahren wir wie in der Nummer 4. Wir lassen die Einzelkraft P in A wagrecht angreifen und zeichnen (Fig. 43) hierfür einen Cremona'schen Kräfteplan.

Fig. 43.



Nennt man die Kräfte dieses Planes K und die Ordinaten der Einflussflächen z, so ergibt sich die Stabkraft nach der Formel

$$S = \frac{K \cdot \Sigma(z)}{m}.$$

Denn berücksichtigt man zunächst bloss den Einfluss des Horizontalschubs auf die Stabkraft, so ist diese $S = \frac{H \cdot y}{a}$. Nun ist aber $H = \frac{P \cdot \Sigma(z)}{m}$ und $K = \frac{P \cdot y}{a}$, folglich $S = \frac{K \cdot \Sigma(z)}{m}$. Dieser Ausdruck umfasst aber auch die Wirkung der lotrechten Kräfte, sobald man unter z die Ordinaten der schraffierten Fläche versteht.

Um mit Hilfe der Einflussflächen die grössten und kleinsten Stabkräfte zu bestimmen, wendet man das übliche Verfahren an. Handelt es sich um eine Eisenbahnbrücke, so zeichnet man die vorgeschriebene Lastenreihe mit senkrechten Strichen auf einen Streifen Pauspapier, legt ihn über die Zeichnung, summiert mittels des Zirkels die Ordinaten z und sucht durch Verschieben des Streifens diejenige Laststellung, welche die grösste Ordinaten-

summe ergibt. Sind die gegebenen Lasten ungleich, so wählt man die am häufigsten vorkommende als Grundlast und verwendet für die hiervon abweichenden Verwandlungswinkel. Bei Strassenbrücken summiert man die z unter jedem Pfosten, ersetzt P durch pf und hat dann

$$S = \frac{pf}{P} \cdot \frac{K \cdot \Sigma(z)}{m}.$$

Streng genommen sollte man bei verteilten Lasten nicht die Ordinaten der Einflussfläche mit dem Zirkel addieren, sondern den Inhalt der Fläche messen, z. B. mittels eines Planimeters; in diesem Falle gilt der Ausdruck

$$S = \frac{p}{P} \cdot \frac{K \cdot F}{m},$$

wo F den Inhalt der Einflussfläche bedeutet. Doch wird das Addieren der Ordinaten in der Regel vorgezogen, weil es weniger Zeit erfordert; die Stabkräfte werden hierbei, wie man leicht erkennt, etwas zu gross erhalten.

Mittels der Einflussflächen kann man auch den Einfluss des Eigengewichts bestimmen, indem man den ganzen Inhalt der Fläche misst und mit $\frac{g}{P} \cdot \frac{K}{m}$ multipliziert. Doch wird man in der Regel das Zeichnen eines Cremona-Planes (Nr. 18) der Kürze wegen vorziehen.

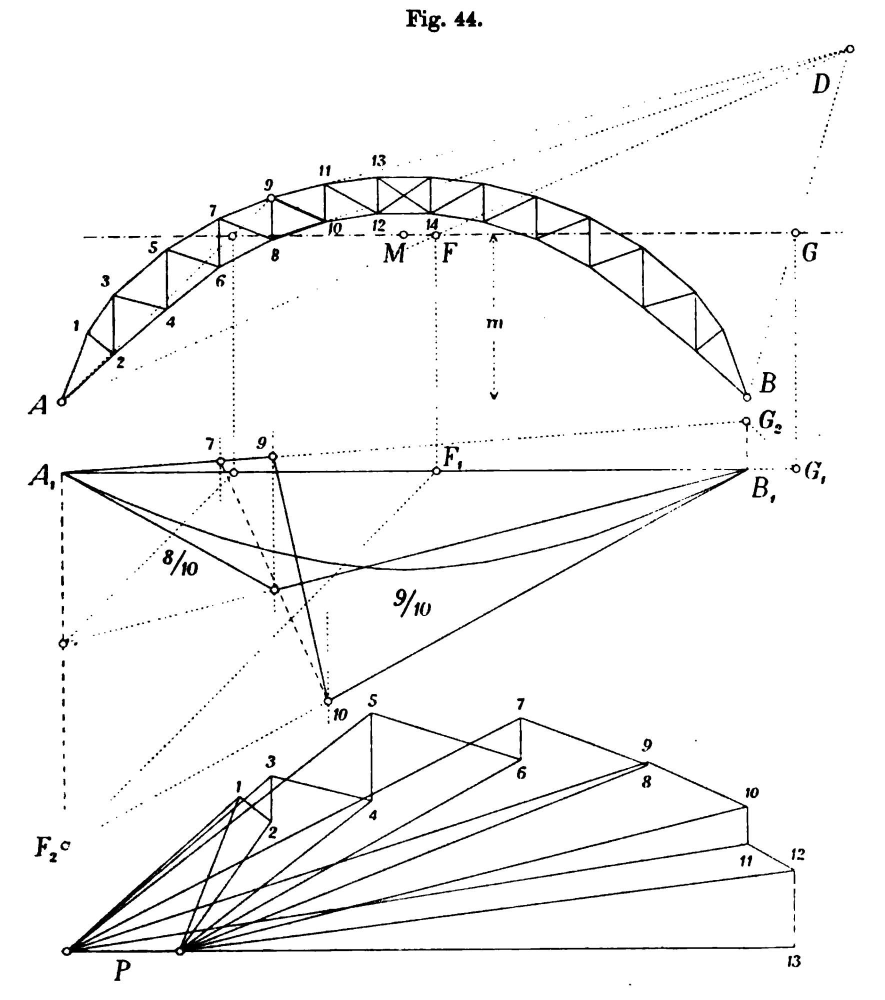
Was das Vorzeichen der gefundenen Stabkräfte betrifft, so gibt man den Kräften K das Plus- oder Minuszeichen, je nachdem sie Zug- oder Druckkräfte sind. Ebenso nennt man die Ordinaten z positiv oder negativ, je nachdem sie oberhalb oder unterhalb der Kurve $A_1 B_1$ liegen. Bei der Multiplikation der K und z ergibt sich dann das Vorzeichen der Stabkraft von selbst. Übrigens lässt sich das Vorzeichen der Stabkraft noch kürzer daraus bestimmen, dass von den zwei Grenzwerten der Stabkraft der grössere stets dasselbe Vorzeichen wie die Eigengewichtskraft haben muss.

Besitzt der Bogen vollwandige Teile, so sind die Regeln der Nummer 22 anzuwenden. Oder man zerlegt das vollwandige Stück in Ober- und Untergurt und verfährt wie bei den fachwerkförmigen Teilen. Die Drehpunkte wählt man je in der Mitte des gegenüberliegenden Gurtstabes.

20. Einflusslinien für die Stabkräfte bei gekrümmtem Obergurt.

Bogen mit gekrümmtem Obergurt behandelt man nach derselben Weise wie solche mit geradem. Nur zwingt die meist ferne Lage der Strebendrehpunkte zu einigen Änderungen.

Fig. 44.



In der Fig. 44 ist zunächst die Einflussfläche für den Gurtstab 8 10 gezeichnet. $A_1 B_1$ ist, wie früher, das Seileck, das entsteht,

wenn man die Gewichte Δw als lotrechte Kräfte zusammensetzt, und die M-Linie wird durch ein Seileck mit wagrecht wirkenden Gewichten gefunden (Fig. 34). Am Fusse der Figur sind die Kräfte K bestimmt, die sich ergeben, wenn man die Last P in A wagrecht angreifen lässt. Dieser Kräfteplan kommt leicht ungenau heraus, weil man zu kurzen Linien lange Parallelen ziehen muss. Man tut daher gut, von Zeit zu Zeit eine Gurtungskraft durch Rechnung zu bestimmen nach der Formel $K = \frac{P \cdot y}{a}$ und den Cremona-Plan danach zu verbessern.

Nennt man nun die Ordinaten der Einflussfläche z, so ist, wie früher, die Stabkraft $S = \frac{K \cdot \Sigma(z)}{m}$.

Nach derselben Regel können Strebenkräfte berechnet werden. In der Fig. 44 ist auch die Einflussfläche für die Strebe 9 10 gezeichnet worden. Der Drehpunkt D liegt hier ausserhalb der Spannweite. Man verbindet D mit A und B, schneidet die M-Linie in F und G an, bestimmt hieraus, wie gewohnt, F_2 und G_2 und zieht $A_1 G_2$ und $B_1 F_2$. Dann bekommt man durch Herunterloten der Strebenendpunkte den Linienzug A_1 9 10 B_1 und damit die gesuchte Einflussfläche.

Dieses Verfahren ist für die Streben in der Nähe des Auflagers noch brauchbar. Rückt man aber gegen den Scheitel hin, so werden die Linien AD und BD immer flacher, die Einflussflächen immer grösser und zugleich die Kräfte K immer kleiner, so dass das Produkt $K \cdot \Sigma(z)$ sich nicht mehr mit der nötigen Genauigkeit berechnen lässt. Wir sehen uns genötigt, hier einen anderen Weg einzuschlagen.

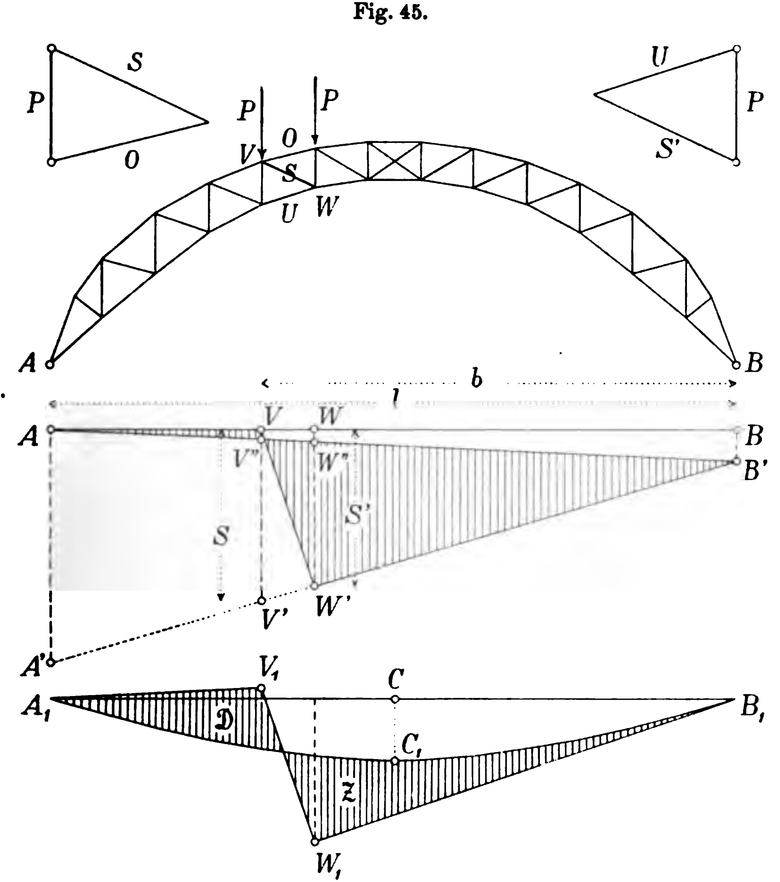
Wir zeichnen zuerst die Einflussfläche für die lotrechten Kräfte allein, d. h. ohne Rücksicht auf den Horizontalschub, und ziehen nachher die Einflussfläche für den Horizontalschub davon ab. Dabei wenden wir, was hier bequemer ist, einen konstanten Kräftemassstab an.

Es soll die Strebe VW (Fig. 45) berechnet werden. Wir lassen zunächst die Last P in V angreifen und zerlegen sie in S und O; dann stellen wir die Last über W auf und zerlegen sie in U und S' (Fig. 45 oben links und rechts). Dann tragen wir von einer wagrechten Linie AB aus die Kraft S lotrecht unter V, die Kraft S' lotrecht unter W auf, verlängern $V' W'$ bis zur Auflagerlinie B und

ziehen $A\,B'$, dann stellt die schraffierte Fläche $A\,V\,W'\,B'$ die Einflussfläche für die lotrechten Kräfte dar.

Steht nämlich die Last P über V, so wirken links von der Strebe die Kräfte P und A. Wenn in A die Kraft P wirken würde, so ergäbe sich die Strebenkraft gleich $A\,A'$, da aber der Auflagerdruck

Fig. 45.



$A = \frac{P\,.\,b}{l}$ wirkt, so muss die Kraft $A\,A'$ mit $\frac{b}{l}$ multipliziert werden; das gibt die Kraft $V'\,V''$. Diese hat man nun von $V\,V'$ abzuziehen, um die Strebenkraft zu erhalten, die also durch $V\,V''$ dargestellt wird. In derselben Weise folgt, dass $W'\,W''$ die Strebenkraft für eine über W stehende Last P darstellt.

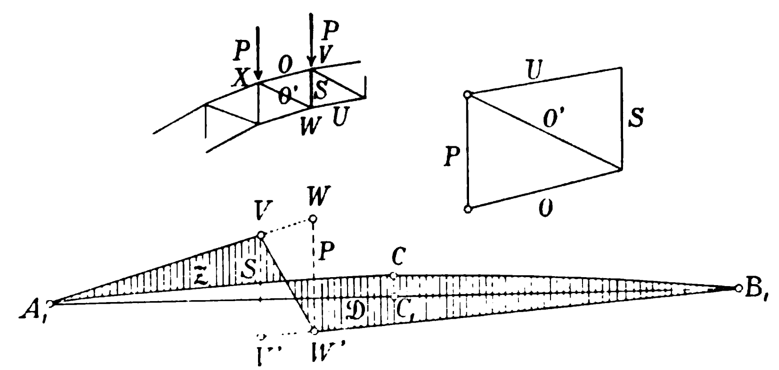
Die Grundlinie der Einflussfläche läuft zunächst schief. Will

man sie wagrecht haben, so braucht man bloss die Strecke BB' nach oben aufzutragen und den neuen Punkt mit A und B mit A' zu verbinden. Man erhält dadurch den Linienzug $A_1\, V_1\, W_1\, B_1$ (Fig. 45 unten).

Nun muss die Einflussfläche für H abgezogen werden. Die Stabkräfte, die von H herrühren, sind $S = \frac{H.y}{a} = \frac{P.z.y}{a.m} = \frac{K.z}{m}$. Wir multiplizieren demgemäss die Ordinaten z der H-Fläche mit dem Verhältnis $K:m$ und tragen die Ergebnisse von der Geraden $A_1\, B_1$ aus unter der jeweiligen Laststellung auf. Dies führt uns schliesslich zu der schraffierten Fläche $A_1\, B_1$ in der Fig. 45 unten.

Zur Multiplikation mit $K:m$ verwendet man Verwandlungswinkel. Häufig sind die abzuziehenden Längen so klein, dass es genügt, bloss diejenige in der Mitte der Spannweite, also $C\,C_1 = \frac{K.c}{m}$ zu berechnen und die Kurve $A_1\, C_1\, B_1$ nach dem Augenmass zu zeichnen. Diese Arbeit ist natürlich für jede Strebe besonders durchzuführen.

Fig. 46.



Handelt es sich um eine lotrechte Strebe, z. B. um den Stab $V\,W$ der Fig. 46, so verfährt man in ähnlicher Weise. Man lässt die Last P im Knotenpunkte X wirken, zerlegt sie erst nach O und O' und hierauf O' nach U und S. Zweitens lässt man P in V angreifen; in diesem Falle ist S einfach gleich P. Jetzt trägt man $V\,V' = S$ und $W\,W' = P$ unter der entsprechenden Last auf, zieht die Linien $V'\,W'\,B_1$ und $W\,V\,A_1$, ferner $A_1\,B_1$ und $V\,W'$; endlich trägt man $C\,C_1 = \frac{K.c}{m}$ auf und zieht durch A_1, C und B_1 eine der H-Linie ähnliche Kurve.

Die Strecke CC_1 muss in diesem Falle nicht nach unten, sondern nach oben aufgetragen werden. Auf welcher Seite die Kurve liegen muss, lässt sich wie folgt entscheiden. Zunächst beachte man, dass die Streben auf Zug oder Druck beansprucht werden, je nachdem sie gegen die Lasten fallen oder steigen (vgl. Teil II, S. 22). Diese Betrachtung bestimmt das Vorzeichen desjenigen Teiles der Einflussfläche, der von den vertikalen Lasten herrührt. Sodann untersuche man, ob die K-Kraft in der Fig. 44 (S. 77) eine Zug- oder eine Druckkraft ist; daraus erkennt man, ob die Ordinaten der H-Fläche positiv oder negativ sind. Aus diesen Überlegungen ergibt sich mit Bestimmtheit, nach welcher Seite der Einfluss des Horizontalschubs aufzutragen ist. In der Einflussfläche für den Pfosten 10 11 z. B. wirken die linksseitigen Lasten auf Zug, die rechtsseitigen auf Druck, weil der Pfosten nach links fällt und nach rechts steigt. Ferner ist die K-Kraft 10 11 eine Druckkraft; folglich sind die Ordinaten des Seilecks nach oben aufzutragen.

Das hiermit beschriebene Verfahren ist umständlicher als das frühere, man wird letzteres so weit als möglich vorziehen. Wenn aber die Drehpunkte weit abseits liegen, so bleibt kaum etwas anderes übrig, als das zweite Verfahren anzuwenden. Es besitzt nebenbei den Vorteil eines konstanten Massstabes. Während die Ordinaten der Einflussflächen nach dem ersten Verfahren Linien sind und mit $K:m$ multipliziert werden müssen, um zu Kräften zu werden, stellen die Ordinaten nach dem zweiten Verfahren unmittelbar die gesuchten Stabkräfte dar und zwar in demselben Massstabe, in welchem man die Last P aufgetragen hat. —

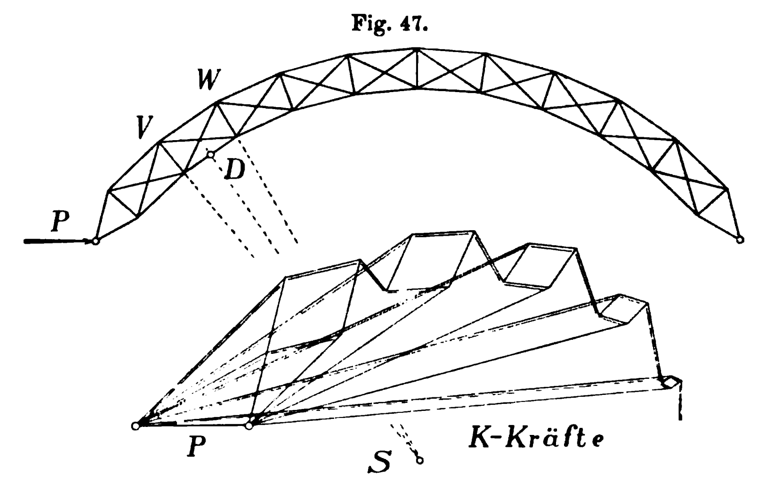
Bei Bogen mit gekrümmtem Obergurt treten nicht selten gekreuzte Streben auf, wodurch der Bogen mehrfach statisch unbestimmt wird. In der Praxis darf man jedoch dieselbe Rechnungsart anwenden, wie bei einfachem Strebenzug. Die Formänderung der Streben wird auch hier gewöhnlich vernachlässigt, weil sie auf das Schlussergebnis nur geringen Einfluss ausübt. Man beschränkt sich darauf, die Δw für die Gurtungen zu berechnen und zu berücksichtigen.

Als Drehpunkt der Gurtstäbe wählt man jetzt jedoch die Mitten der gegenüberliegenden Stäbe, oder genauer: Man verlängert die beiden Radialpfosten unter V und W bis zu ihrem Schnittpunkt S und verbindet S mit dem Kreuzungspunkt der Streben; dann schneidet diese Verbindungslinie den richtigen Drehpunkt ab. Bei

der Berechnung von Δw ist als a sein Abstand vom Stabe VW einzuführen.

Die Einflusslinien werden genau wie früher konstruiert. Für zwei sich kreuzende Streben erhält man, da ihre Drehpunkte zusammenfallen, nur eine einzige Einflussfläche; dagegen ergeben sich bei den K-Kräften je zwei Werte, der eine mit positivem, der andere mit negativem Zeichen. Den Plan der K-Kräfte kann man einheitlich zeichnen, wie es in der Fig. 47 für den halben Bogen gezeigt ist (vgl. Teil II, Nr. 36.); oder man zeichnet zwei Pläne, den einen mit den fallenden, den andern mit den steigenden Streben und nimmt von je zwei zusammengehörigen Werten das Mittel.

Fig. 47.



Auch beim Kräfteplan für Eigengewicht hat man die Wahl, die Stabkräfte alle in einer Zeichnung zu vereinigen, oder den Plan zu spalten. Was die Berechnung der Radialpfosten betrifft, so wird sie gewöhnlich ganz umgangen, da nur kleine Stabkräfte heraus kommen uud man die Querschnitte der Pfosten aus baulichen Gründen doch weit grösser machen muss, als die Rechnung ergibt.

Die statische Berechnung solcher Bogenträger verläuft also ganz analog derjenigen von Balkenfachwerken mit gekreuzten Streben. Es empfiehlt sich jedoch, die Rechnung durch eine Zugabe zu ergänzen, nämlich durch eine Korrektur mit Rücksicht auf die statische Unbestimmtheit infolge der Kreuzung der Streben.

Nach der Theorie statisch unbestimmter Fachwerke sind die

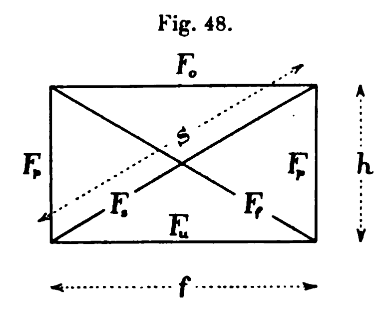
Stabkräfte nur dann richtig, wenn die Bedingung $\Sigma(K.\Delta s) = 0$ erfüllt ist. (Vgl. Teil II, S. 130.) Dabei sind unter Δs die Stabverlängerungen und unter K die Stabkräfte verstanden, die sich ohne Hinzutreten äusserer Kräfte im Gleichgewicht halten. Für ein rechteckiges Fachwerk sind die Kräfte K den Stablängen proportional; die Umfangskräfte sind positiv, die Strebenkräfte negativ. Das Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn man zu den ursprünglichen Kräften S' die Kräfte αK addiert. Die Stabverlängerungen sind dann $\Delta s = \frac{S' + \alpha K}{EF} . s$. Setzt man $\Sigma(K.\Delta s) = 0$, so wird

$$\alpha = -\Sigma\left(\frac{K S' s}{EF}\right) : \Sigma\left(\frac{K^2 s}{EF}\right).$$

Man bestimmt zunächst die Kräfte S' nach dem gewöhnlichen Verfahren und berechnet α, dann sind die richtigen Kräfte $S = S' + \alpha K$.

Durch diese Berechnung werden die Druckkräfte in den Gurtungen etwas kleiner, dafür werden die Streben stärker auf Druck

Fig. 48.



beansprucht. Selbstverständlich dürfen diese Verbesserungen nur für einen und denselben Belastungsfall vorgenommen werden. Da es sich dabei hauptsächlich um die Verbesserung der Strebenkräfte handelt, so wählt man diejenigen Belastungsfälle, welche die Strebenkräfte zum Maximum oder Minimum machen.

Es sei beispielsweise für den Belastungsfall, bei welchem die fallende Strebe am stärksten gezogen, die steigende am stärksten gedrückt wird, gefunden worden:

$$S_f' = +20\,t, \quad S_s' = -24\,t, \quad S_u = -60\,t, \quad S_o = -70\,t, \quad S_p = 0.$$

Ferner sei $f = 4{,}0$ m, $h = 3{,}0$ m, $s = 5{,}0$ m; $F_f = 30$ cm², $F_s = 35$ cm², $F_u = 160$ cm², $F_o = 180$ cm² und $F_p = 36$ cm²; dann ergibt sich folgende Zahlenrechnung für $E = 1$:

	S'	K	s	F	$\frac{KS's}{F}$	$\frac{K^2 s}{F}$	$S = S' + \alpha K$
	t		m	cm²			t
Streben . . .	+ 20	− 5,0	5,0	30	− 16,7	+ 4,17	+ 16,5
	− 24	− 5,0	5,0	35	+ 17,1	+ 3,57	− 27,5
Gurtungen . .	− 60	+ 4,0	4,0	160	− 6,0	+ 4,00	− 57,2
	− 70	+ 4,0	4,0	180	− 6,2	+ 3,56	− 67,2
Pfosten . . .	0	+ 3,0	3,0	36	0	+ 0,75	+ 2,1
	0	+ 3,0	3,0	36	0	+ 0,75	+ 2,1
					$\Sigma = -11,8$	$\Sigma = +16,80$	

$$\alpha = - \frac{-11,8}{16,8} = + 0,70.$$

Diese Rechnung kann freilich nur dann Anspruch auf Richtigkeit machen, wenn das betreffende Fach allein gekreuzte Streben hat. Da sich die Nachbarfelder in derselben Lage befinden, so beeinflusst ein Feld das andere. Dieser Umstand kann jedoch mit genügender Annährung dadurch berücksichtigt werden, dass man die Pfostenquerschnitte F_p bloss zur Hälfte in die Rechnung einführt.

Die vorstehend beschriebene Verbesserung der Strebenkräfte ist unter sonst gleichen Umständen bei Bogenträgern einschneidender als bei Balkenfachwerken, weil bei letzteren die beiden Gurtungsstäbe in entgegengesetztem Sinne, der eine auf Zug und der andere auf Druck beansprucht werden, während bei Bogenträgern beide Gurtungen gedrückt werden. Bei Balkenfachwerken wird diese Verbesserung in der Regel vernachlässigt, bei Bogenfachwerken empfiehlt es sich, sie stets durchzuführen, wenn auch, wie eben gezeigt wurde, nur in angenäherter Weise. —

Bei Brücken mit gekrümmtem Obergurt trägt häufig nicht jeder Knotenpunkt einen Fahrbahnpfosten, sondern bloss jeder zweite oder dritte. Die Einflussflächen sind in diesem Falle den Lastangriffspunkten entsprechend abzuändern. Stehen beispielsweise die Fahrbahnpfosten in der Fig. 44 (S. 77) über den Knotenpunkten 3, 7, 11 u. s. w., so muss in der Einflussfläche die Linie 9 10 durch die Linie 7 10 ersetzt werden.

Alle diese Erwägungen und Regeln lassen sich auch auf sogenannte Sichel- oder Halbmondträger anwenden.

21. Einfluss der Wärme.

Die Stabkräfte in statisch bestimmten Fachwerken, also auch diejenigen der dreigelenkigen Bogen, sind von den Schwankungen der im Eisen herrschenden Temperatur unabhängig. Bei Bogen mit weniger als drei Gelenken entstehen dagegen infolge der Wärmeschwankungen ansehnliche Stabkräfte, die bei der Bestimmung der Querschnittsmasse nicht übersehen werden dürfen.

Man geht gewöhnlich von der Voraussetzung aus, der Bogen werde bei einer mittleren Temperatur spannungslos aufgestellt und die Wärme könne sich um 25—30° C. vergrössern oder verringern.

Wir denken uns, der Bogen werde in B festgehalten und könne sich in A frei verschieben. Nimmt dann die Wärme um t Grade zu und ist α der Ausdehnungskoeffizient des Eisens, so verschiebt sich der Punkt A wagrecht um die Strecke $\alpha t l$ (l = Spannweite). Da diese Verschiebung infolge der festen Lagerung des Bogens unmöglich ist, so entsteht in der Verbindungslinie der beiden Gelenkpunkte eine Kraft T, die so gross ist, dass sie die Verschiebung des Punktes A wieder rückgängig macht.

Auf der Seite 62 haben wir gezeigt, dass ein Horizontalschub von der Grösse H die Bogensehne um die Strecke $H.w.m$ verkürzt, worin $w = \Sigma\left(\frac{sy}{EFa^2}\right)$ die Summe aller elastischen Gewichte und m die Entfernung des Schwerpunktes der Gewichte von der Bogensehne bedeutet. Wir setzen also

$$\alpha t l = T w m$$

und finden zur Berechnung der Temperaturkraft die Formel

$$T = \frac{\alpha t l}{w m}.$$

Bei der Berechnung der Δw gestattet man sich gewöhnlich die Vereinfachung, den Elastizitätsmodul E gleich eins zu setzen. In diesem Falle muss man E nachträglich wieder einführen, und es ergibt sich

$$T = \frac{E \alpha t l}{w m}.$$

Die Kräfte, welche die Wärmeschwankungen in den Stäben des Bogens hervorrufen, werden nun einfach dadurch bestimmt, dass man

die Kraft T im Punkte A als wagrechte Kraft wirken lässt. Bereits haben wir aber die Einzellast P in dieser Weise wirken lassen und daraus die Kräfte K gefunden (Fig. 43). Es braucht daher kein neuer Kräfteplan gezeichnet zu werden, sondern man findet die Temperaturkräfte der einzelnen Stäbe einfach nach der Formel

$$S_t = \frac{T.K}{P}.$$

Diese Kräfte sind zu denjenigen, die vom Eigengewicht und von der Verkehrslast herrühren zu addieren und zwar stets sowohl mit positivem, als mit negativem Vorzeichen.

Zuweilen wird auch die Frage aufgeworfen, welche Kräfte in den Stäben auftreten, wenn bloss einzelne davon sich erwärmen.

Erwärmt sich beispielsweise ein unterer Gurtstab um t Grade, so verlängert er sich um die Strecke $\Delta s = \alpha t s$. Infolgedessen öffnet sich der Winkel am Drehpunkte um den Betrag $\Delta \delta = \frac{\Delta s}{a}$. (Bezüglich der Buchstaben vgl. Fig. 31, S. 56.) Diese Winkeländerung hat eine Verlängerung der Bogensehne gleich $y . \Delta \delta = \frac{\alpha t s y}{a}$ zur Folge. Erwärmen sich gleichzeitig mehrere Stäbe, so hat man $\Sigma(y . \Delta \delta) = \alpha t . \Sigma\left(\frac{s y}{a}\right)$ zu setzen. Dieser Wert muss wieder gleich $T . w . m$ sein, woraus sich die Temperaturkraft

$$T = \frac{\alpha t}{w m} . \Sigma\left(\frac{s y}{a}\right)$$

ergibt. Hat man bei der Berechnung der elastischen Gewichte den Elastizitätsmodul gleich eins gesetzt, so ist diesem Ausdrucke noch E beizufügen.

Bei der Anwendung dieser Formel hat man zu beachten, dass die Änderung der Bogensehne positiv ist, wenn untere Gurtstäbe sich erwärmen, dagegen negativ, wenn die Erwärmung obere Gurtstäbe betrifft. In ähnlicher Weise hat man Streben und Pfosten zu unterscheiden. Allgemein ist die Grösse $\frac{s y}{a}$ positiv oder negativ in Rechnung zu setzen, je nachdem die entsprechende K-Kraft eine Druck- oder eine Zugkraft ist.

Eine Erwärmung einzelner Stäbe entsteht gewöhnlich durch die Sonnenbestrahlung. Der Unterschied zwischen der inneren Wärme der von der Sonne beschienenen und der im Schatten liegenden Stäbe ist jedoch in der Regel nicht so gross, wie vielfach angenommen wird; denn von dem Wärmegrad der von der Sonne getroffenen Oberfläche kann man nicht ohne weiteres auf die Durchschnittswärme eines Stabes schliessen. Im allgemeinen dürfte ein Unterschied von 10° der Wirklichkeit entsprechen. Ob es nötig ist, die aus dieser einseitigen Erwärmung entspringenden Stabkräfte bei der Bestimmung der Querschnittsmasse zu berücksichtigen, ist eine offene Frage. Wird sie bejaht, so muss man, um konsequent zu sein, diese Erweiterung der Berechnung auch auf Balkenfachwerke übertragen.

22. Vollwandige Bogen.

Vollwandige Bogen mit I-förmigem Querschnitt können dadurch wie fachwerkförmige berechnet werden, dass man den Kopf des Querschnittes als Obergurt und den Fuss als Untergurt ansieht. Doch ist das ein Notbehelf, der einen sorgfältigen Rechner kaum befriedigen wird. Der genauere Weg besteht in folgendem.

Wirkt auf ein Bogenelement eine Kraft R (Fig. 33, S. 59), so dreht sich der eine Endquerschnitt gegenüber dem andern um den Winkel

$$\Delta\delta = \frac{R \,.\, r \,.\, \Delta s}{E J}.$$

Im vorliegenden Falle handelt es sich zunächst darum, die Durchbiegungskurve für den Horizontalschub zu zeichnen. Nennt man die Abstände der Elemente von der Bogensehne y, so ist $R \,.\, r = H \,.\, y$ zu setzen. Ähnlich wie bei Fachwerken fassen wir die konstanten Grössen zusammen und schreiben

$$\Delta w = \frac{y \,.\, \Delta s}{E J}.$$

Dann ist der Formänderungswinkel

$$\Delta\delta = H \,.\, \Delta w.$$

Betrachtet man diese Winkel, beziehungsweise die Grössen Δw als Kräfte und setzt sie durch ein Seilpolygon zusammen, so bekommt man die Einflusslinie für den Horizontalschub. (Vgl. S. 63.)

Der Punkt, um welchen sich die elastische Drehung vollzieht, ist jedoch hier nicht der Schwerpunkt des Elementes, sondern der Antipol der Kraft H hinsichtlich der Elastizitätsellipse des Elementes. (Vgl. Teil I, S. 153 u. Teil III, S. 261.) Die wagrechte Halbachse der Ellipse ist bei Vernachlässigung der Scherspannungen

$$i_1 = \sqrt{1/12} \,.\, \Delta s,$$

die senkrechte

$$i_2 = \sqrt{\frac{J}{F}}.$$

Will man auf die Formänderung infolge der Scherspannungen Rücksicht nehmen, was allgemein überflüssig ist, so hat man $i_1 = \sqrt{\frac{\Delta s^2}{12} + \frac{\varkappa E J}{G F_s}}$ zu setzen, worin F_s die Querschnittsfläche des Steges und G den Gleitmodul bezeichnet. (Vgl. Teil III, Nr. 2.)

Mit diesen Bemerkungen ist der Weg gekennzeichnet, auf dem man vorzugehen hat, um den Horizontalschub und die Auflagerdrücke für Einzellasten zu bestimmen.

Man teilt den Träger, der Pfostenteilung entsprechend, in Elemente ein (Fig. 49), berechnet für jedes Element das durchschnittliche Trägheitsmoment J und das elastische Gewicht Δw. Ferner zeichnet man in jedes Element die Elastizitätsellipse ein. Dann betrachtet man die Gewichte als Kräfte, lässt sie in den Antipolen der Bogen-

Fig. 49.

sehne erst senkrecht und hierauf wagrecht als Kräfte wirken und zeichnet die beiden Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$. Dadurch erhält man den Schwerpunkt M aller Gewichte, und es ist, wie früher, der Bogenschub für eine Last P

$$H = \frac{P \cdot z}{m}.$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Ausdrucks lässt sich ebenso wie in der Nr. 16 führen.

Zieht man die Linien $B_1 E_1 F_2$, $F_2 F_1$ und AFE, so ist AE, wie früher, die Richtung des Auflagerdrucks für die Last P, und die Verbindungslinie der Punkte E bildet die Kämpferdrucklinie.

Was sodann die Berechnung der inneren Kräfte des Bogens anbelangt, so weicht man insofern von der früheren Rechnungsweise ab, als man nicht die Stabkräfte, sondern die Spannungen in den äussersten Kanten des Bogens berechnet. Dabei wendet man die sogenannte Kernformel an, nach welcher die Spannung gleich ist dem Kernmoment geteilt durch das Widerstandsmoment des Querschnitts. (Vgl. Teil I, S. 56.)

Das Einzeichnen der Elastizitätsellipsen und die Bestimmung der Antipole ist eine Erschwerung der Arbeit, der man sich nicht wohl entziehen kann. Die Spannungen für Eigengewicht hängen hiervon wesentlich ab, besonders bei flachen Bogen und verhältnismässig grossen Querschnittshöhen.

Die genaue Bestimmung des Antipols einer geraden Linie g in bezug auf eine Ellipse gestaltet sich gewöhnlich wie folgt:

Man dreht die beiden Halbachsen um 90°, bringt die Achsen der Ellipse mit der Geraden zum Schnitt und zeichnet von den Schnittpunkten

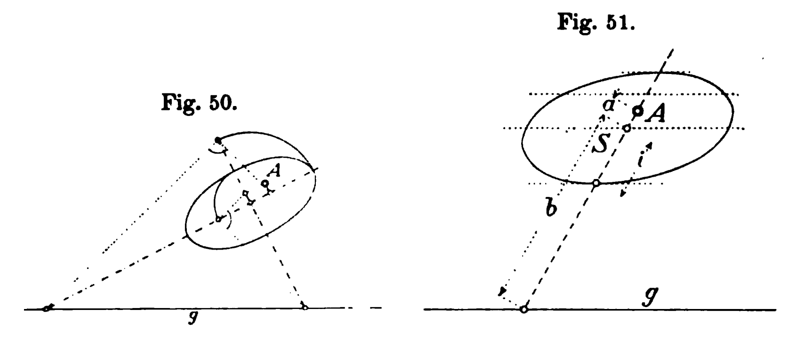


Fig. 50. Fig. 51.

aus über den gedrehten Halbmessern zwei rechte Winkel (Fig. 50). Dann bestimmen zwei weitere Linien parallel zu den Achsen den Antipol A.

Im vorliegenden Falle, wo die Ellipsen meistens klein sind, genügt dagegen in der Regel folgender Annäherungsweg (Fig. 51):

Man zeichnet die Ellipse, nachdem ihre Achsen bestimmt sind, von Hand, legt durch sie drei bis vier Sehnen parallel zu der Geraden g, halbiert sie und bekommt durch Verbindung der Halbierungspunkte den konjugierten Durchmesser. Hierauf misst man auf diesem die Entfernung b des Ellipsenmittelpunktes von der Geraden g und den entsprechenden Ellipsenhalbmesser i. Dann ergibt sich die Entfernung des Antipols $a = \frac{i^2}{b}$; denn A und g bilden ja auf dem zu g konjugierten Durchmesser eine Involution, in welcher S den Mittelpunkt und die Ellipsenpunkte ein Paar entsprechender Punkte darstellen.

Eigengewicht.

Um den Einfluss des Eigengewichtes zu finden, summiert man zunächst die Ordinaten unter sämtlichen Pfosten und setzt (Fig. 49)

$$H = \frac{g f . \Sigma(z)}{m}.$$

Dann zeichnet man mit dieser Kraft die Drucklinie für Eigengewicht und berechnet für eine Reihe von Querschnitten die Eigengewichtsspannungen mittels der Kernformel

$$\sigma = \frac{R . r}{F . k},$$

worin R die äussere Kraft, r ihren Hebelarm hinsichtlich des Kernpunktes, F die ganze Querschnittsfläche und k den Kernhalbmesser bedeutet. Als zu berechnende Querschnitte wählt man die Schnitte unter den Pfosten, weil die Drucklinie an diesen Stellen Ecken besitzt und die Spannungen daher hier in der Regel am grössten werden. Die Kräfte R bekommt man aus dem Krafteck für das Eigengewicht. Die Längen r werden in der Zeichnung abgegriffen. Auch die k können der Zeichnung entnommen werden. Genauer verfährt man indessen, wenn man die Kernhalbmesser für verschiedene Querschnitte zahlenmässig berechnet, sie ausserhalb des Bogens in grösserem Massstabe aufträgt, ihre Endpunkte durch Linien verbindet und die gewünschten k aus dieser Figur abgreift. (Vgl. Tafel 1.)

Die Berechnung der Eigengewichtsspannungen leidet an dem Übelstande, dass die Hebelarme r der Kräfte R oft nicht mit genügender Genauigkeit abgegriffen werden können. Man tut gut, den Massstab der Zeichnung ziemlich gross zu wählen und sich beim Zeichnen der Drucklinie möglichster Genauigkeit zu befleissigen. Um einen Anhaltspunkt für die erreichte Genauigkeit zu erhalten, empfiehlt es sich, den Abstand der Drucklinie von der Bogenachse im Scheitel zu berechnen und die Zeichnung danach zu prüfen. Hierzu dient der in der Nummer 32 abgeleitete Ausdruck, nach welchem diese Entfernung gleich $\frac{15 J y}{8 F f^2}$ ist. (J = Trägheitsmoment, F = Flächeninhalt des Bogenquerschnitts, f = Pfeilhöhe des Bogens.) Bei veränderlichen J und F setzt man Mittelwerte ein; die Formel wird selbstverständlich um so unsicherer, je stärker sich die Werte J und F von einem Auflager zum andern ändern.

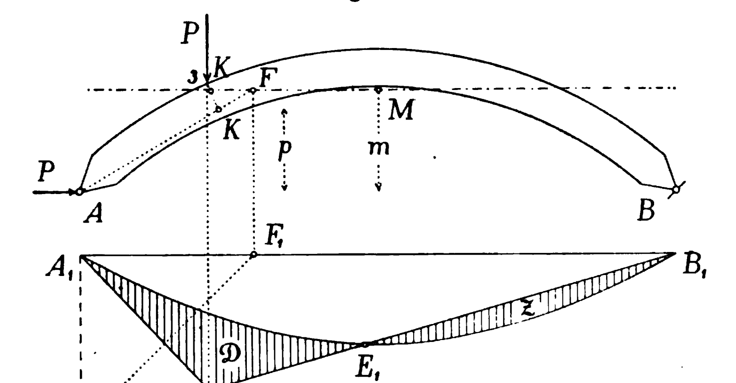
Eine grössere Genauigkeit zu erzielen, als es auf dem beschriebenen Wege möglich ist, gelingt nur, wenn man die Ordinaten der H-Linie, den Bogenschub und hiernach die Hebelarme r durch Zahlenrechnung bestimmt.

Zufällige Last.

Zur Berechnung des Einflusses der zufälligen Lasten benutzt man am einfachsten Einflusslinien.

Die Einflussfläche für eine bestimmte Kantenspannung setzt sich zusammen aus derjenigen für die lotrechten Kräfte und derjenigen für den Horizontalschub. Erstere wird (Fig. 52) durch das Dreieck $A_1 D_1 B_1$, letztere durch das Seileck $A_1 B_1$ gebildet. Um beispielsweise die Einflussfläche für die obere Kante des Querschnitts 3 zu zeichnen, verbindet man den untern Kernpunkt K mit A, schneidet die M-Linie an, lotet F nach F_1 herunter und macht $A_1 F_2$ gleich $A_1 F_1$. Dann zieht man $B_1 F_2$ und $A_1 D_1$. Die Richtigkeit

Fig. 52.



dieses Verfahrens folgt, wie früher, daraus, dass eine über E_1 stehende Last in der zu berechnenden Kante keine Spannung hervorruft; denn für diese Last bekommt der Auflagerdruck die Richtung AF und da diese Linie durch den untern Kernpunkt geht, so ist die Spannung in der obern Kante null.

Den Massstab für die Einflussfläche findet man dadurch, dass man im Punkte A die vorgeschriebene Last P wagrecht angreifen lässt und die hieraus entspringenden Spannungen σ_k berechnet. Man benutzt auch hierzu die Kernformel und bestimmt die Spannungen rechnerisch. Ist p der Abstand des untern Kernpunktes von der Bogensehne und k der Kernhalbmesser, so ergibt sich

$$\sigma_k = \frac{P \cdot p}{F \cdot k}.$$

Für jeden Querschnitt bekommt man zwei Werte für σ_k, den einen für die obere, den andern für die untere Kante.

Hat man für einen bestimmten Fall die grösste Ordinatensumme der Einflussfläche ermittelt, so ist schliesslich die gesuchte Spannung (vgl. S. 75).

$$\sigma = \frac{\sigma_k \cdot \Sigma(z)}{m}.$$

Für jeden Querschnitt erhält man vier verschiedene σ, zwei beziehen sich auf die obere, zwei auf die untere Kante; der eine stellt je die grösste, der andere die kleinste Spannung dar.

Wärmeschwankung.

Die Temperaturkraft ergibt sich wie bei Fachwerkbogen

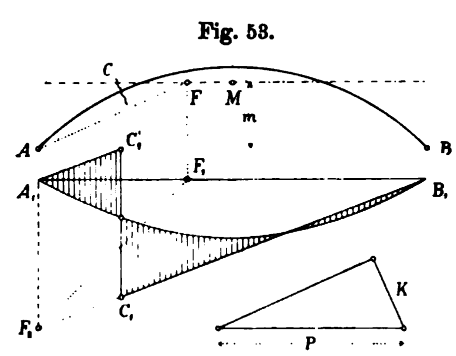
$$T = \frac{\alpha t l}{w m},$$

und die Spannungen sind

$$\sigma_t = \frac{T \cdot \sigma_k}{P}.$$

Das Verfahren zur statischen Berechnung eines vollwandigen Bogens unterscheidet sich demnach wenig von demjenigen eines fachwerkförmigen Bogens. Statt der Stabkräfte berechnet man die Spannungen in den äussersten Kanten und an Stelle der Drehpunkte treten die Kernpunkte. Im übrigen bleibt das Verfahren das alte.

Fig. 53.



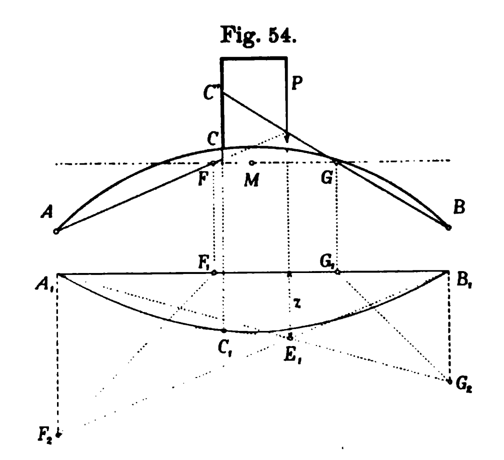
Ist ein Bogen teilweise vollwandig und teilweise fachwerkförmig gebaut, so wendet man für den vollwandigen Teil das vorstehende Verfahren, für den fachwerkförmigen das frühere an; eine Störung ergibt sich hieraus keineswegs.

Es empfiehlt sich, bei vollwandigen Bogen für einige Querschnitte auch die grössten Querkräfte zu bestimmen und daraus die Nietspannungen abzuleiten. In der Fig. 53 ist dies für den Schnitt C geschehen. Man zieht in C die Tangente an die Bogenachse und durch A eine Parallele AF dazu. Dann lotet man F

herunter, zieht $F_1 F_2$ unter 45°, verbindet F_2 mit B_1 und zieht $A_1 C_1'$ parallel dazu. Das Verfahren entspricht ganz demjenigen, das wir in Fig. 41 angewendet haben zur Bestimmung der Strebenkraft eines fachwerkförmigen Bogens. Hiermit bekommt man die Einflussfläche für die Querkraft und kann jetzt, wie früher, das Maximum der $\Sigma(z)$ bestimmen. Hierauf zerlegt man die massgebende Last P parallel und senkrecht zur Bogenachse, die letztere Teilkraft sei K. Dann ist die gesuchte Querkraft $Q = \frac{K \cdot \Sigma(z)}{m}$. Nennt man noch die Nietentfernung e und die Höhe des Steges h, so ist die Nietkraft nach bekannter Annäherungsformel $N = \frac{Q \cdot e}{h}$.

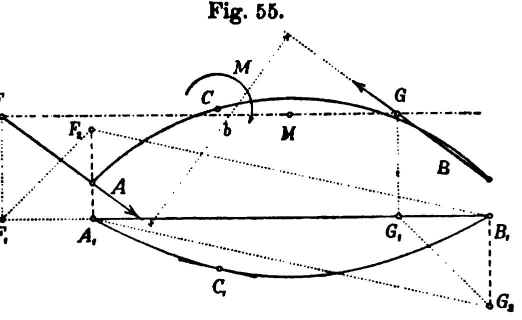
Auf einfachem Wege können auch überhängende Lasten behandelt werden (Fig. 54). Um die Auflagerdrücke für die Last P zu finden, zieht man lotrecht unter der Angriffsstelle in C_1 die Tangente an das Seileck $A_1 B_1$, lotet P herunter nach E_1, zieht die Linie $B_1 E_1 F_2$, macht $A_1 F_1$ gleich $A_1 F_2$, lotet F_2 hinauf und zieht $A F$. Die Drucklinie für die Last P ist jetzt $A\,C\,C'\,B$ und der Horizontalschub, wie immer, $H = \frac{P \cdot z}{m}$.

Fig. 54.



Das Verfahren gilt auch, wenn P über dem Auflager B oder ausserhalb der Spannweite steht. Wird P gar zu einer unendlich fernen Kraft, mit andern Worten zu einem Kräftepaar vom Momente M, so rückt der Punkt E_1 ins Unendliche (Fig. 55); die Linien $A_1 G_2$ und $B_1 F_2$ werden parallel zur Tangente in C_1 und die Auflagerdrücke A und B bilden ebenfalls ein Kräftepaar. Ihre Grösse ergibt sich $A = B = \frac{M}{h}$.

Fig. 55.



23. Unsymmetrische Bogen.

In den bisherigen Betrachtungen haben wir stets vorausgesetzt, der Bogen sei symmetrisch gebaut, die Widerlager seien gleichhoch und die Fahrbahn wagrecht. Nicht selten wird man durch ungleiche Gestalt der beiden Ufer, namentlich aber durch eine geneigte Fahrbahn genötigt, eine unsymmetrische Bogenform zu wählen. Weicht die Form nur wenig von der symmetrischen ab, so erlaubt man sich gewöhnlich, bei der Berechnung der Stabkräfte davon abzusehen; die Arbeit wird dadurch ziemlich genau auf die Hälfte beschränkt. Doch kann man sich über die Folgen der Unsymmetrie leicht täuschen; es empfiehlt sich, sie zu berücksichtigen, auch wenn sie scheinbar geringfügig ist. Der Gang der Arbeit ist im wesentlichen der nämliche, wie früher.

Zunächst werden in derselben Weise, wie früher, die elastischen Gewichte

$$\Delta w = \frac{s y}{E F a^2}$$

berechnet, wobei jedoch die y nicht lotrecht, sondern senkrecht zur Richtung der Bogensehne zu messen sind (Fig. 56). Dann trägt man die Gewichte als lotrechte Kräfte auf, wählt ihre Summe als Polweite und zeichnet dazu das Seileck $A_1 B_1$. Dabei legt man den Pol O_1 so, dass die Schlusslinie wagrecht wird. Zu dem Zwecke zeichnet man mit einem beliebigen Pole ein provisorisches Seileck und zieht durch den Pol eine Parallele zur Schlusslinie, dann schneidet dieser Parallelstrahl auf der Kraftlinie die Höhenlage des richtigen Poles ab.

Sodann lässt man die Gewichte Δw wagrecht wirken und zeichnet dazu das Seileck $A_2 B_2$. Die Polweite ist hier beliebig und wird zu gunsten einer grösseren Genauigkeit kleiner als w gemacht (Pol O_2). Verlängert man in jedem der beiden Seilecke die äussersten Seiten bis zu ihrem Schnittpunkte (M_1 und M_2), so findet man in bekannter Weise den Schwerpunkt M sämtlicher Gewichte. Den Abstand des Punktes M von der Bogensehne nennen wir m. Durch M zieht man parallel zu AB die M-Linie.

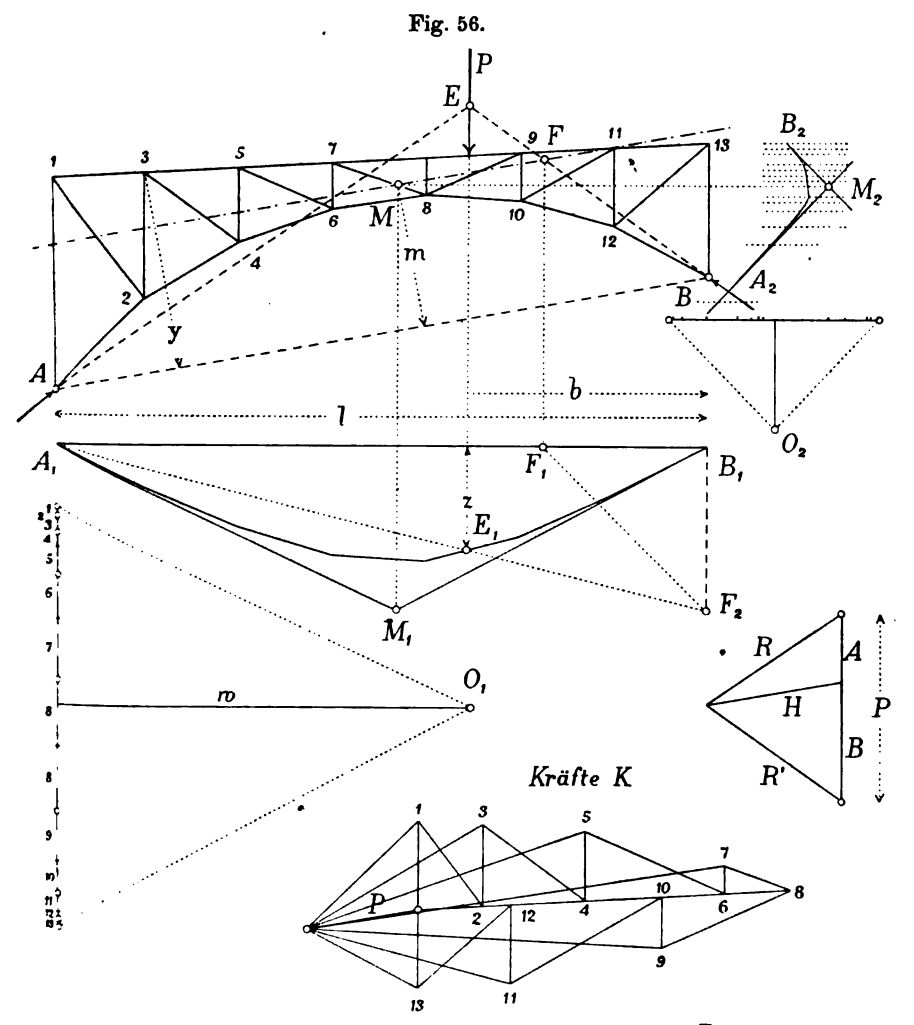
Das Seileck $A_1 B_1$ ist nun wiederum die Durchbiegungskurve für den in der Bogensehne wirkenden Horizontalschub, somit dessen Einflusslinie, und es lässt sich ganz so wie in der Nummer 16 zeigen,

dass für eine Last P

$$H = \frac{P \cdot z}{m}$$

ist. Zerlegt man die Last P in ihre beiden Auflagerdrücke R und R' und diese ferner lotrecht und parallel zu AB, so sind die Kräfte A und B auch hier die Auflagerdrücke, die man erhält, wenn man

Fig. 56.



den Bogen als Balken betrachtet; es ist also $B = \frac{P \cdot a}{l}$. Nun verhält sich

$$B:H = \frac{P.a}{l} : \frac{P.z}{m} = m : \frac{z.l}{a} = m : z',$$

oder

$$B.z' = H.m.$$

Hiernach kann die Richtung von R' für eine Last P bestimmt werden. Man zieht die Linie $A_1\,E_1\,F_2$ und unter 45° die Linie F_2F_1, dann lotet man F_1 hinauf nach F und zieht BF. Denn für den Punkt F ist die Bedingung $B.z' = H.m$ erfüllt. Durch Wiederholung dieser Zeichnung gelangt man zur Kämpferdrucklinie. Das Verfahren ist, wie man sieht, das nämliche wie früher. Auch die Bestimmung des Horizontalschubs für Eigengewicht, die Ermittlung der Eigengewichtsstabkräfte, das Zeichnen der Einflussflächen für die Stabkräfte, der Plan der Kräfte K (Fig. 56 unten) und die Berechnung der grössten und kleinsten Stabkräfte unterscheiden sich in keiner Weise von dem früher beschriebenen Verfahren. Für die in der Bogensehne wirkende Temperaturkraft gilt die Formel auf S. 85, wobei $l = AB$. Selbstverständlich ist die Arbeit stets gegenüber früher die doppelte. Zu beachten ist, dass die Ordinaten der Einflussflächen stets lotrecht zu messen sind, während die Längen y und m senkrecht zur Bogensehne stehen.

24. Wagrechte Belastungen.

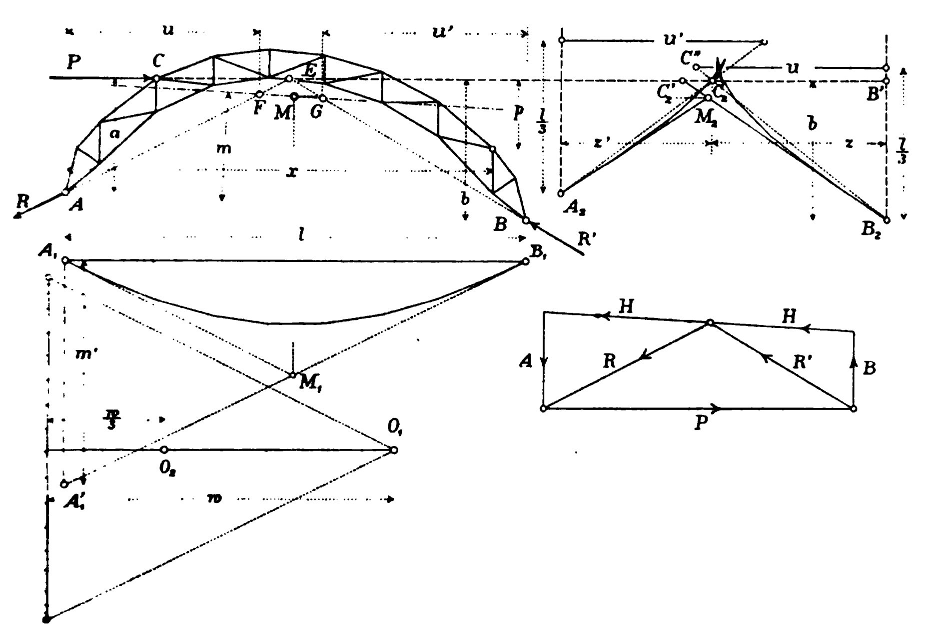
Auf den Bogen der Fig. 57 wirke im Punkte C eine wagrechte Kraft P; es sollen die Auflagerdrücke R und R' bestimmt werden. Die Auflagerdrücke müssen, wie bei lotrechten Lasten, durch die Gelenkpunkte A und B gehen und sich auf der Richtungslinie von P schneiden; die drei Kräfte P, R und R' bilden ein geschlossenes Krafteck. Die Drucklinie ist AEB.

Zerlegt man die Auflagerdrücke in Teilkräfte lotrecht und parallel zur Bogensehne, so bekommt man zwei Horizontalschübe H und H'; der eine wirkt in A, der andere in B. Die lotrechten Komponenten von R und R' lassen sich nach dem Momentensatze bestimmen; es ist $A = \frac{Pb}{l}$ und $B = \frac{Pa}{l}$; die Kräfte H und H' dagegen müssen auf Grund der elastischen Formänderungen ermittelt werden.

Wir berechnen, wie früher, die elastischen Gewichte $\Delta w = \frac{sy}{EFa^2}$,

tragen sie als Kräfte auf und zeichnen zwei Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$. Im ersten lassen wir die Δw lotrecht wirken, im zweiten wagrecht. Die Polweite für das erste Seileck machen wir gleich $w = \Sigma(\Delta w)$ und legen den Pol so, dass die Schlusslinie wagrecht wird. Den Abstand des zweiten Poles O_2 nehmen wir, um grössere Genauigkeit zu erzielen, gleich $^1/_3 w$ an. Die Seiten des zweiten Seilecks stehen, wie üblich, senkrecht zu den Strahlen aus O_2. Die

Fig. 57.



äussersten Seiten beider Seilecke bestimmen den Schwerpunkt M aller Δw.

In der Nummer 16 ist gezeigt worden, dass das Seileck $A_1 B_1$ die Einflussfläche des Horizontalschubs für lotrechte Lasten ist; in ähnlicher Weise, wie dort, lässt sich nachweisen, dass das Seileck $A_2 B_2$ die Einflussfläche des Horizontalschubs für wagrechte Lasten darstellt.

Um dies einzusehen, untersuchen wir, um wieviel sich der Punkt A in der Richtung AB unter der Wirkung der drei Kräfte P, A und H verschiebt, während B festgehalten wird. und setzen die Summe der Verschiebungen gleich null.

Diese Verschiebungen sind allgemein gleich der wirkenden Kraft

mal dem statischen Momente der Gewichte Δw, bezogen auf die Kraftrichtung. (Vgl. Nr. 15.) Für die Last P ist die Verschiebung gleich $P . \Sigma_C^B (p . \Delta w)$. Nach der Theorie der parallelen Kräfte ist aber $\Sigma_C^B (p . \Delta w)$ gleich der Polweite mal dem Abschnitt der einschliessenden Seilpolygonseiten, also gleich $1/_3\, w . C_2 C'_2$. Die Wirkung von A, zweitens, ist gleich $A . \Sigma (x . \Delta w)$ oder, wenn man die Summe wieder gleich Polweite mal Abschnitt setzt, gleich $A . w . m'$. Die Wirkung von H, drittens, ergibt sich, wie früher, gleich $H . w . m$. Hierbei dreht P in positivem Sinn, A in negativem und H wieder positivem. Es ist daher $1/_3\, P . w . C_2 C'_2 - A . w . m' + H . w . m = O$. Setzt man $A = \frac{Pb}{l}$, so wird

$$H = \frac{P}{3\,m} \left(\frac{3\,m'\,b}{l} - C_2 C'_2\right).$$

Angenommen, wir hätten das Seileck $A_1 B_1$ mit dem Pole O_2 gezeichnet, so wäre m' dreimal grösser ausgefallen. Ferner wäre in diesem Falle das Dreieck $A_1 A'_1 B_1$ dem Dreieck $B_2 C'_2 B'$ ähnlich geworden, weil die Seiten paarweise aufeinander senkrecht ständen. Folglich verhält sich $3\,m' : l = B' C'_2 : b$, woraus folgt

$$H = \frac{P}{3\,m} (B' C'_2 - C_2 C'_2) = \frac{Pz}{3\,m}.$$

(Wählt man nicht $1/_3\, w$, sondern w als Polweite für das zweite Seileck, so fällt in dem Ausdruck für H die Zahl 3 weg; doch wird hierdurch die Zeichnung leicht ungenau.)

Vertauscht man die linke Seite des Bogens mit der rechten, so findet man auf demselben Wege

$$H' = \frac{Pz'}{3\,m}.$$

Um sodann die Richtung von R zu finden, setzen wir $A : H = \frac{Pb}{l} : \frac{Pz}{3\,m}$, oder $A . \frac{lz}{3\,b} = H . m$. Trägt man $1/_3\, l$ von B_2 aus lotrecht auf und verlängert $B_2 C_2$ bis C'', so wird daselbst $u = \frac{lz}{3\,b}$ abgeschnitten. Überträgt man diese Strecke mit dem Zirkel in den Bogen, so dass F von der linken Auflagerlinie den wagrechten Abstand u bekommt, so ist AF die gesuchte Richtung des Auflagerdruckes; denn für den Punkt F ist das Moment von A gleich demjenigen von H.

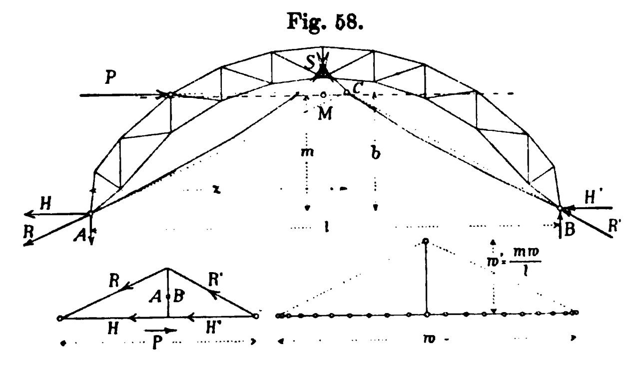
Vertauscht man die rechte Seite mit der linken, so bekommt man in derselben Weise den Punkt G und damit die Richtung von R'. Hat man genau gearbeitet, so schneiden sich die beiden Auflagerdrücke auf der Richtungslinie von P.

Sind die Richtungen von R und R' gefunden, so sind damit auch ihre Grössen sowie diejenigen von H und H' bestimmt.

Will man die Stabkräfte kennen, die eine Last P erzeugt, so zeichne man an der Hand des Kraftecks PRR' einen Cremonaschen Kräfteplan.

Bei symmetrischen Bogenträgern lässt sich die Zeichnung wesentlich vereinfachen. Man wählt die Polweite für das zweite Seileck $w' = \frac{m \cdot w}{l}$, dann wird $A_2 B_2$ gleich der Spannweite und man kann das zweite Seileck derart zeichnen, dass A_2 mit A und

Fig. 58.



B_2 mit B zusammenfällt (Fig. 58). Für die Polweite $\frac{w}{3}$ wird nämlich die Summe $z + z' = 3\,m$ und für $w' = \frac{w\,m}{l}$, wie leicht einzusehen ist, gleich l. Um die Strecke m zu finden, zeichnet man mit der Hälfte aller $\varDelta w$ ein provisorisches Seileck, oder man wendet die Formel auf S. 64 an. Die Gewichte $\varDelta w$ trägt man der Bequemlichkeit wegen am besten wagrecht auf.

Der Horizontalschub für eine Last P ist jetzt

$$H = \frac{P z}{m} \cdot \frac{w'}{w} = \frac{P z}{l}.$$

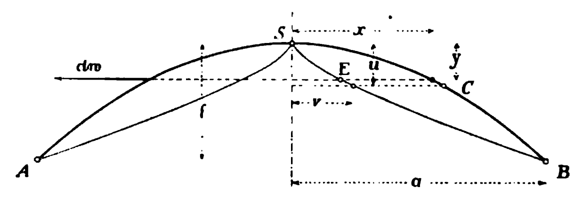
Es verhält sich daher $A : H = \frac{P b}{l} : \frac{P z}{l}$ oder $A . z = H . b$, woraus folgt, dass der Auflagerdruck R durch den Punkt C geht. Dasselbe

gilt vom Auflagerdruck R'; das zweite Seileck ist somit zugleich die „Kämpferdrucklinie“ für wagrechte Lasten. —

Ist das Trägheitsmoment des Bogenquerschnitts ganz oder nahezu konstant, so lässt sich die Kurve ASB bequemer durch Rechnung finden.

Wir wählen (Fig. 59) S als Ursprung der Koordinaten und setzen, entsprechend den Erörterungen der Nummer 32, $dw = (f-y)\,dx$

Fig. 59.



und $w = {}^2/_3 fl$, ferner, die Bogenlinie als Parabel annehmend, $y = \frac{fx^2}{a^2}$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{2fx}{a^2}$. Die dw wirken in den Antipolen der Bogensehne, also um $\frac{i^2}{f-y}$ oberhalb der Punkte C, wobei $i = \sqrt{J:F}$.

Nun ist v das statische Moment der Gewichte von S bis C, also

$$w'.v = \int_0^u dw.\left(u - y + \frac{i^2}{f-y}\right) = \int_0^u (fu - uy - fy + y^2 + i^2)\frac{a}{2\sqrt{f}}.\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

woraus für $w' = \frac{mw}{l}$ und für $m = {}^4/_5 f + \frac{3i^2}{2f}$ (S. 126) folgt

$$f(8f^2 + 15i^2)^2 v^2 = a^2 u(-2u^2 + 10fu + 15i^2)^2.$$

Die Kurve ASB ist, wie man sieht, vom fünften Grade.

Für angenäherte Rechnungen darf man $i = O$ setzen. Dann lautet die Gleichung etwas einfacher

$$16 f^5 v^2 = a^2 u^3 (5f - u)^2.$$

Für $\frac{u}{f}$ =	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
wird $\frac{v}{a}$ =	0,000	0,039	0,107	0,193	0,291	0,398	0,511	0,629	0,752	0,875	1,000.

Mit Hilfe dieser Zahlen lässt sich die Kurve ASB leicht und rasch zeichnen. —

Bogenträger werden hauptsächlich der Bremskräfte wegen auf wagrechte Belastungen berechnet. Bei symmetrischer Anordnung des Bogens und symmetrischer Kraftverteilung wird die Drucklinie ebenfalls symmetrisch und die Auflagerdrücke lassen sich unmittelbar, ohne jede vorbereitende Arbeit angeben; denn sie sind einander gleich und müssen sich auf der Richtungslinie der Kräfte schneiden. Ist dagegen die Bogenform oder die Belastung unsymmetrisch, so sind die oben beschriebenen Rechnungsverfahren anzuwenden.

Die Stabkräfte für eine gegebene Belastung findet man in jedem Falle durch einen Cremona-Plan.

25. Schiefe Belastungen.

Sind die den Bogen belastenden Kräfte schief gerichtet, so kann man sie in wagrechte und lotrechte Kräfte zerlegen, deren Auflagerdrücke nach dem Vorangegangenen einzeln bestimmen und hierauf wieder zusammensetzen. Dieser Weg mag am Platze sein, wenn die Lasten verschiedene Richtung besitzen. Sind jedoch sämtliche Lasten gleich gerichtet, wie z. B. bei Windkräften, so ist es vorzuziehen, das folgende Verfahren anzuwenden.

Man berechnet, wie gewöhnlich, die elastischen Gewichte Δw und zeichnet damit zwei Seilecke. In dem einen lässt man die Gewichte parallel zu den gegebenen Belastungen, in dem andern senkrecht dazu wirken. Die beiden Seilecke bestimmen den Schwerpunkt M sämtlicher Gewichte. Das erste Seileck stellt ferner die Einflusslinie für den Horizontalschub dar, und durch Hinzufügen von geraden Linien gelangt man zu den Einflussflächen für einzelne Stäbe. Das Verfahren ist im Grunde genommen das gleiche wie für lotrechte Belastung, nur mit dem Unterschied, dass die Gewichte jetzt in schiefer Richtung wirken; man denkt sich am einfachsten den Bogen in der Zeichnungsebene so gedreht, dass die Belastungen lotrechte Richtung annehmen und wendet die ursprüngliche Rechnungsweise an.

Nach diesem Verfahren lässt sich unter anderem eine Eisenbahnbrücke berechnen, bei der die Bremskräfte berücksicht werden sollen.

Die Aufgabe ist einfach, sobald angenommen wird, dass die Bremskräfte den lotrechten Lasten durchgehends proportional seien, oder, was das nämliche sagen will, dass sämtliche Räder des Bahn-

zuges gleichzeitig gebremst werden und der Reibungskoeffizient für alle Räder derselbe sei. Dann braucht man bloss jede Last mit der ihr entsprechenden Reibungskraft zusammenzusetzen, wodurch sie eine schiefe Richtung annimmt, um hierauf das eben beschriebene Verfahren anzuwenden. Die Bestimmung der Einflussflächen für einzelne Stäbe, die Ermittlung der ungünstigsten Belastungen und der grössten und kleinsten Stabkräfte unterliegt jetzt keiner Schwierigkeit mehr. Indessen muss man in der Regel die Arbeit zweimal durchführen, einmal für rechts-, das andre Mal für linksfahrenden Bahnzug.

Weit umständlicher wird die Arbeit, wenn man annimmt, dass nicht alle, sondern nur ein Teil der Fahrzeuge gebremst werde. In der Regel dürfte es indessen gestattet sein, von der strengen Berücksichtigung dieser Vorschrift abzusehen und anzunehmen, dass sämtliche Achsen gebremst werden, dafür aber den Reibungkoeffizient entsprechend kleiner anzusetzen. .Beträgt z. B. dieser Koeffizient $^1/_6$ und wird verlangt, dass bloss die Hälfte aller Achsen als gebremst anzusehen sind, so führt man die Rechnung mit dem Reibungskoeffizienten $^1/_{12}$ durch.

Noch einfacher wird die Arbeit, wenn man die Berechnung des Bogens zunächst bloss für lotrechte Lasten durchführt und hierauf die Wirkung der Bremsung für sich bestimmt und zwar für vollbelastete Brücke. In diesem Falle sind die Regeln der Nr. 24 anzuwenden. Die hieraus entspringenden Stabkräfte fügt man schliesslich zu den früheren hinzu. Dadurch erhält man die Gesamtkräfte stets zu gross, denn die ungünstigste Belastung der Stäbe erstreckt sich gewöhnlich nicht über die ganze Spannweite. —

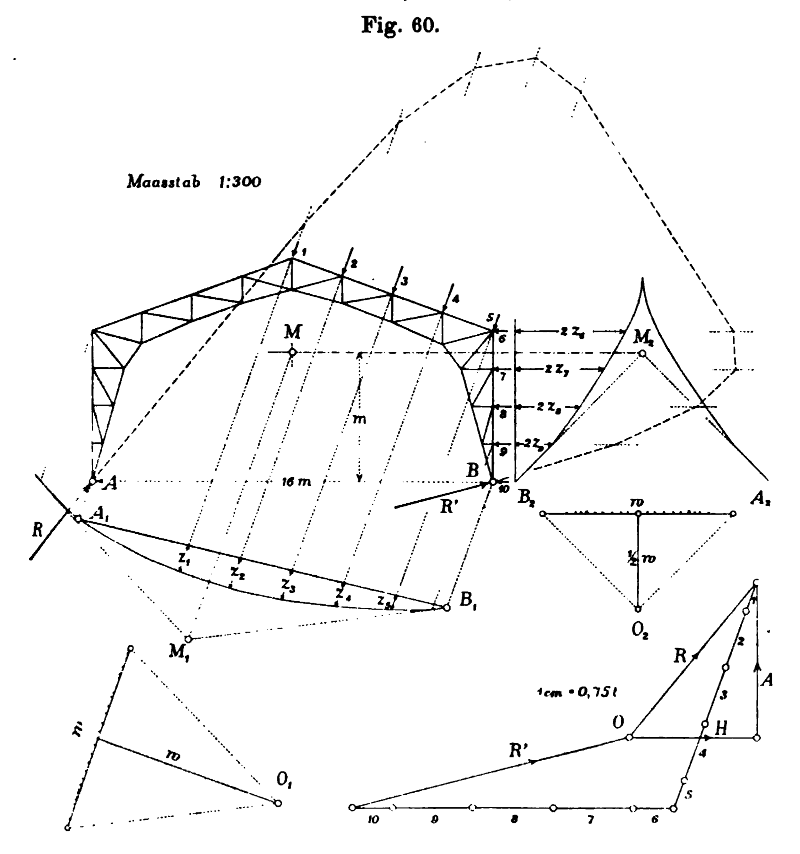
Die Betrachtungen über schiefe Belastungen dienen sodann auch dazu, Dachstühle zu berechnen, die einem schief wirkenden Winddrucke ausgesetzt sind. Diese Aufgabe möge an einem Beispiele erläutert werden.

Der Dachstuhl der Fig. 60 werde von 10 Windkräften getroffen, von denen 5 schief und 5 wagrecht gerichtet sind. Wir berechnen zunächst für sämtliche Gurtstäbe die elastischen Gewichte $\Delta w = \frac{s\,y}{F\,a^2}$. Die Streben darf man ausser acht lassen. Die Querschnittsflächen F setzt man, wenn nichts Bestimmteres vorliegt, gleich eins. Dann ergeben sich die Δw wie folgt.

Nr.	s	y	a	F	Fa^2	Δw
	m	m	m	cm²		
1	1,56	1,50	0,40	1	0,16	14,6
2	3,00	1,50	0,43	1	0,18	25,0
3	1,56	3,00	0,81	1	0,66	7,1
4	1,50	3,00	0,86	1	0,74	6,1
5	1,56	4,50	1,23	1	1,52	4,6
6	1,50	4,50	1,28	1	1,64	4,1
7	1,23	6,00	1,94	1	3,76	2,0
8	2,13	5,50	1,20	1	1,44	8,1
9	2,20	6,73	1,13	1	1,28	11,6
10	2,13	6,37	1,05	1	1,10	12,4
11	2,13	7,46	1,05	1	1,10	14,5
12	2,13	7,10	1,00	1	1,00	15,1
13	2,10	8,19	1,03	1	1,06	16,2
14	2,13	7,63	1,20	1	1,44	11,3
						152,7

$$w = 2 \,.\, 152{,}7 = 305{,}4$$

Fig. 60.



Mit diesen Gewichten werden zwei Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ gezeichnet; in dem einen wirken die Δw parallel zu den auf die Dachfläche treffenden Windkräften, in dem andern wagrecht. Die Polweite nehmen wir beim ersten Seileck gleich w, im zweiten der grösseren Genauigkeit wegen gleich $^1/_2\, w$ an. Die Schnittpunkte der äussersten Seilseiten bestimmen den Schwerpunkt M sämtlicher Gewichte. Sein Abstand von der Bogensehne ist

$$m = 5{,}15 \text{ Meter.}$$

Bei steiler Dachfläche wird die Lage von M des schleifenden Schnittes wegen ungenau, so dass ein drittes Seileck mit lotrecht gerichteten Gewichten wünschenswert wird. Ein solches wird übrigens schon dadurch notwendig, dass auch der Einfluss des Eigengewichtes bestimmt werden muss.

Nun verlängert man die Kraftrichtungen bis in die Seilecke und misst die verschiedenen z mit dem Massstab. Da die Polweite beim zweiten Seilecke gleich der Hälfte von w genommen wurde, so müssen hier die z bloss mit dem halben Werte eingesetzt werden. Jetzt multipliziert man sämtliche P mit ihren z und summiert die Produkte. Dann ist der Horizontalschub

$$H = \frac{\Sigma(P.z)}{m} = \frac{6{,}58}{5{,}15} = 1{,}28 \text{ t}$$

(s. die nachfolgende Tabelle).

Hierauf berechnet man den lotrechten Auflagerdruck A, indem man den Bogen als Balken betrachtet, die Hebelarme der Kräfte in Bezug auf B misst und die P und p ebenfalls miteinander multipliziert. Daraus folgt

$$A = \frac{\Sigma(P.p)}{l} = \frac{24{,}68}{16{,}00} = 1{,}54 \text{ t.}$$

Last	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
P	0,30	0,60	0,60	0,60	0,30	0,40	0,80	0,80	0,80	0,40	—
z	1,12	1,29	1,24	1,00	0,62	2,20	1,78	1,30	0,75	0	—
$P.z$	0,34	0,77	0,74	0,60	0,19	0,88	1,42	1,04	0,60	0	6,58
p	10,54	8,40	6,30	4,19	2,04	6,00	4,50	3,00	1,50	0	—
$P.p$	3,15	5,03	3,77	2,52	0,61	2,40	3,60	2,40	1,20	0	24,68

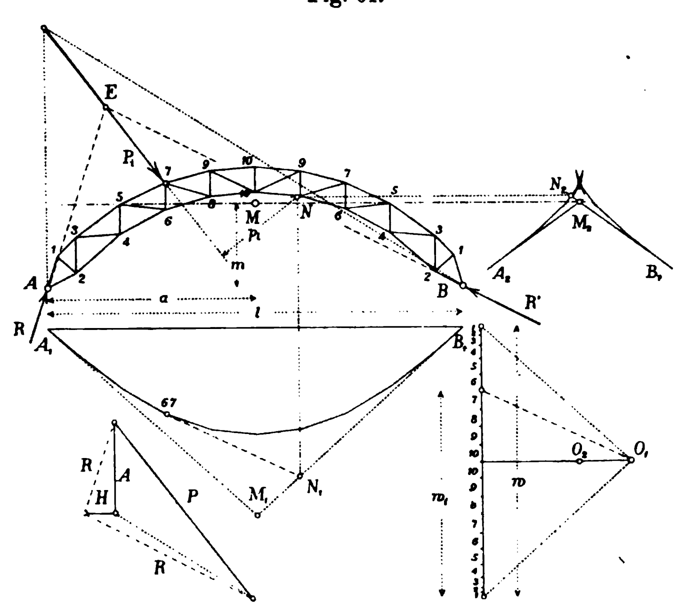
Jetzt ist es leicht, aus H und A den schiefen Auflagerdruck R zu bestimmen. Dann fügt man (Fig. 60 rechts) an R sämtliche P an und zeichnet von A nach B die Drucklinie. Dass diese durch B geht, dient als Probe für die Berechnung von R. Ist man so weit, so führt schliesslich ein Cremona'scher Kräfteplan zum Ziele.

26. Beliebig gerichtete Lasten.

Wie schon in der vorigen Nummer bemerkt wurde, kann man einen Bogenträger bei beliebig gerichteten Lasten dadurch berechnen, dass man sämtliche Lasten in lotrechte und wagrechte Komponenten zerlegt, erstere nach Nr. 16, letztere nach Nr. 24 behandelt und am Schlusse die gefundenen Horizontalschübe wieder zusammensetzt. Doch lässt sich zur Lösung der Aufgabe auch ein unmittelbarer Weg einschlagen, der meistens vorzuziehen ist.

Wir behandeln zuerst eine einzige Last P_i (Fig. 61). Zunächst berechnet man, wie früher, für jeden Gurtstab das elastische

Fig. 61.



Gewicht $\Delta w = \frac{s y}{F a^2}$; hierauf lässt man diese Gewichte in den Drehpunkten der Stäbe erst lotrecht, dann wagrecht angreifen und zeichnet dazu die zwei Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$. Die Polweiten sind hier ganz beliebig. Die Schnittpunkte M_1 und M_2 der äussersten Seilseiten bestimmen den Schwerpunkt M sämtlicher Gewichte.

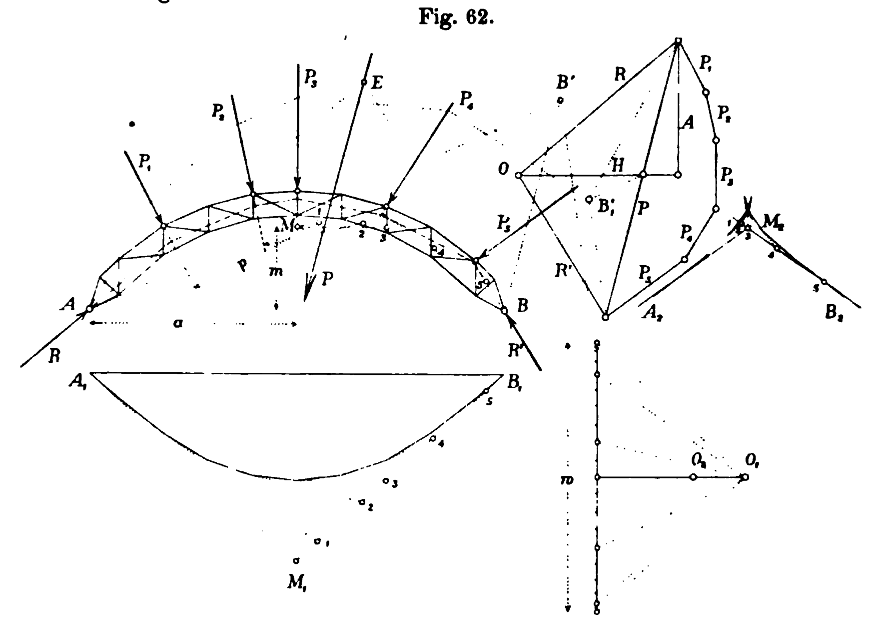
Zugleich bestimmt man aber auch den Schwerpunkt N derjenigen Gewichte, die sich zwischen der Last P_i und dem Auflager B

befinden. Um diesen Punkt zu finden, verlängert man im ersten Seileck die unter der Last liegende Seilseite nach rechts und bringt sie mit der letzten Seite $B_1 M_1$ zum Schnitt. Das nämliche geschieht im zweiten Seileck. Hierauf zieht man durch N_1 eine lotrechte und durch N_2 eine wagrechte Linie. Wir denken uns nun die Last P_i in zwei durch die Auflager gehende Komponenten A und B zerlegt; die Richtung von A ist beliebig, wir nehmen sie lotrecht an. Bezeichnet man dann noch die Summe der Gewichte von P_i bis B mit w_i und hält den Bogen in B fest, so verschiebt sich der Punkt A in der Richtung AB infolge der Wirkung von P_i um die Strecke $P_i . p_i . w_i$ und infolge der Kraft A um die Strecke $A . a . w$ (vgl. Nr. 15). Der Unterschied dieser beiden Werte ist aber gleich $H . w . m$, woraus folgt

$$H = \frac{A a}{m} - \frac{P_i . p_i w_i}{m w}.$$

Zur Berechnung von H kann man ein graphisches Verfahren einschlagen, doch gelangt man bequemer und rascher zum Ziele, wenn man die einzelnen Längen a, m und p_i mit dem Massstab abgreift und die Kraft H mittels obiger Formel berechnet.

Fig. 62.



Setzt man endlich A und H zusammen, so erhält man den Auflagerdruck R und kann die Drucklinie AEB zeichnen.

Hat der Bogen mehrere Lasten zu tragen (Fig. 62), so zeichnet

man zunächst mit diesen Lasten, im Punkte A beginnend, ein Kraft- und ein Seileck AB'. Den Pol B'_1 wählt man beliebig. Dadurch erhalten wir die Resultierende P, die nun zunächst in zwei durch A und B gehende parallele Komponenten zerlegt werden soll. Zu dem Zweck zieht man parallel zur Mittelkraft P die Linie BB' und durch den Pol B'_1 eine Parallele zu AB'. Die durch das Gelenk A gehende Teilkraft zerlegt man weiter lotrecht und wagrecht und erhält so die lotrechte Komponente A des linken Auflagerdrucks. Hierauf berechnet man die Produkte $P_i . p_i . w_i$ und hat endlich, wie oben,

$$H = \frac{A\,a}{m} - \frac{\Sigma(P_i p_i w_i)}{m\,w}.$$

Vereinigt man noch (Fig. 62 rechts) H mit A, so ist der Auflagerdruck R gefunden und die richtige, durch A und B gehende Drucklinie kann gezeichnet werden (Pol O).

Bei symmetrischer Form und Belastung des Bogens gestattet das Verfahren einige Vereinfachungen. Man hält dann besser den Scheitelpunkt des Bogens fest und untersucht die Bewegungen des Punktes A. Die Kraft A ist dann kurzweg gleich der Hälfte von P.

27. Bewegungen der Widerlager.

Gleichwie die Bogen mit zwei Gelenken durch Schwankungen der Wärme beeinflusst werden, so ändern sich ihre innern Kräfte auch, wenn die Widerlager sich verschieben. Diese Bewegung kann eine „elastische" oder eine „unelastische" sein. Unter elastischer Bewegung verstehen wir ein Nachgeben des Widerlagers unter der Wirkung des Auflagerdruckes, ein Nachgeben, das dem Auflagerdruck proportional ist und wieder verschwindet, wenn der Druck aufhört. Unelastische Bewegungen dagegen entstehen durch Setzungen oder Drehungen des Widerlagers infolge mangelhafter Fundation, Unterspülungen u. dgl. Wo solche Bewegungen auftreten, mag es oft erwünscht sein, ihre Folgen auf die Stabkräfte kennen zu lernen.

a) Elastische Bewegungen.

Das Widerlager verschiebe sich unter dem Einfluss einer Kraft eins um die Strecke n, unter dem Einfluss der Kraft H somit um die Strecke $H . n$. Nach früher (S. 62) verschiebt sich das Auflager A, wenn der Bogen in B festgehalten gedacht wird und in

A frei schwebend, infolge der Vertikalkräfte horizontal nach aussen um eine Strecke, welche der Bogenschub wieder rückgängig zu machen hat. Diese Strecke beträgt $H.w.m.$ Ist das Widerlager nun nachgiebig, so vermehrt sie sich noch um $H.n.$ Die Summe beider Werte ist $H.w.m + H.n = H.w.(m + \frac{n}{w})$. Hieraus folgt, dass die Nachgiebigkeit des Widerlagers berücksichtigt wird, wenn man m um $\Delta m = \frac{n}{w}$ vergrössert. Hat man die elastischen Gewichte für $E = 1$ berechnet, so ist $\Delta m = \frac{E n}{w}$ zu setzen.

Die Berechnung der Stabkräfte ist nun einfach mit diesem vergrösserten m durchzuführen; alles andere bleibt sich gleich. Die M-Linie rückt etwas in die Höhe, der Horizontalschub wird etwas kleiner als sonst. Die Zeichnung der Einflussflächen dagegen, sowie der Kräfteplan der K und die Formeln zur Berechnung der Stabkräfte bleiben unverändert. (Vgl. hiermit Nr. 35.)

Sind beide Widerlager nachgiebig, so ist $\Delta m = \frac{n_a + n_b}{w}$ zu setzen.

b) Unelastische Bewegungen.

Das Widerlager verschiebe sich unabhängig vom Bogenschub wagrecht um die Strecke n. Dann stellt sich eine in der Bogensehne wirkende Kraft ΔH ein, welche sich nach der Formel $\Delta H.w.m = n$ oder, wenn die Δw mit $E = 1$ berechnet worden sind, nach der Formel $\Delta H.w.m = E.n$ berechnen lässt. Hat man ΔH bestimmt, so findet man die Stabkräfte, die sich infolge der Nachgiebigkeit des Widerlagers einstellen, ähnlich wie die Temperaturkräfte (Nr. 21) nach der Formel $\Delta S = \frac{\Delta H.K}{P}$. Verschiebt sich das Widerlager nach innen, so ist ΔH positiv, verschiebt es sich nach aussen, negativ einzusetzen; denn im ersten Fall wird der Horizontalschub vergrössert, während er im zweiten, wie bei den elastischen Bewegungen, verkleinert wird. Verschieben sich beide Widerlager, so setzt man

$$\Delta H = \frac{n_a + n_b}{w.m}.$$

Beispiel: Die Widerlager des auf der Tafel I berechneten Bogens haben sich nach erfolgtem Ausrüsten und nach Aufbringen des die Fahrbahn bildenden Kieses links um 7, rechts um 5 mm

wagrecht verschoben, es sollen die Kräfte bestimmt werden, die infolge dieser Bewegung in den Stäben des Bogens entstehen.

Wir setzen $n = 1{,}2$ cm und finden

$$\Delta H = \frac{E.n}{w.m} = \frac{2000.1{,}2}{1{,}172.757} = 2{,}71 \text{ t},$$

folglich

$$S = \frac{2{,}71.K}{4{,}05} = 0{,}669.K.$$

Hiernach ergeben sich beispielsweise folgende Stabkräfte:

$U_{4\text{-}6} = -4{,}88$ t, $O_{5\text{-}7} = +3{,}55$ t, $S_{5\text{-}6} = -2{,}27$ t, $P_{4\text{-}5} = +1{,}61$ t

28. Älteres Verfahren zur Berechnung der Stabkräfte.

In der zweiten Auflage seiner „Graphischen Statik" hat Culmann zur Berechnung der Bogenträger ein Verfahren entwickelt, das im allgemeinen weniger Zeit erfordert, aber nicht dieselbe Übersichtlichkeit gewährt, wie das Verfahren mittels Einflusslinien. Auch setzt es gleichförmig verteilte Belastungen voraus und eignet sich deshalb nicht wohl zur Berechnung von Eisenbahnbrücken. Immerhin soll es hier in seinen Hauptzügen beschrieben werden.

Zunächst wird auf dem in Nr. 17 beschriebenen Wege die Kämpferdrucklinie KL gezeichnet (Fig. 63), welche den Ausgangspunkt für die folgenden Erörterungen bildet. Die zwei Seilecke, die zur Bestimmung der Kämpferdrucklinie führen, sind in unserer Figur weggelassen.[1])

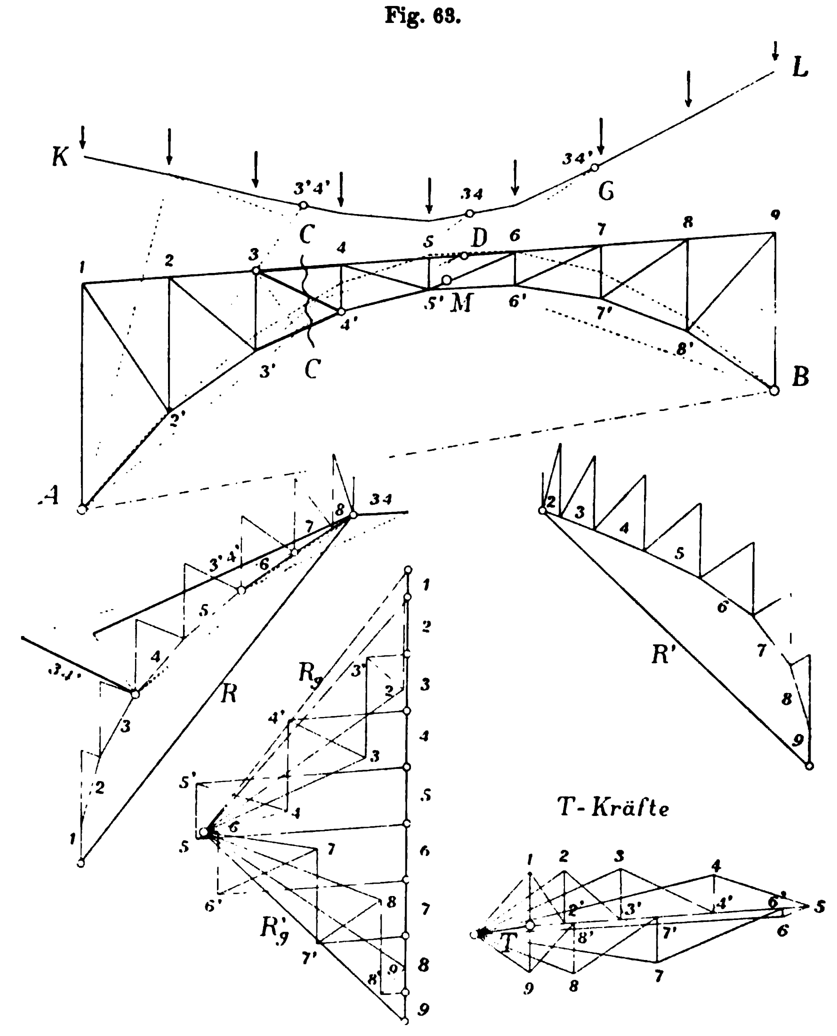
Eigengewicht.

Man denkt sich über jedem Pfosten eine Last $P = gf$ aufgestellt. Auf die beiden Endpfosten fällt, vorausgesetzt, dass sich an den eisernen Bogen gleich das gemauerte Widerlager anschliesst, nur die Hälfte dieser Last. Sodann zerlegt man jede Last in ihre beiden Auflagerdrücke und setzt diese Drücke sowohl für die linke, wie für die rechte Seite fortlaufend zusammen (Fig. 63 links und

[1]) Das von Culmann eingeschlagene Verfahren zum Zeichnen der Kämpferdrucklinie stützt sich nicht auf zwei, sondern auf drei Seilecke. Der Unterschied besteht darin, dass durch das erste der drei Culmann'schen Seilecke die elastischen Gewichte erster Ordnung mit den Hebelarmen y multipliziert werden, während nach dem in der Nummer 17 beschriebenen Verfahren diese Multiplikation durch eine Zahlenrechnung ersetzt wird.

rechts). Man beginnt links mit der Last 1, die selbstverständlich keine Zerlegung erfordert. Dann fügt man die Last 2 an und zerlegt sie parallel zu 2^*A und 2^*B. Hierauf wird die Last 3 angefügt und

Fig. 63.



zerlegt. So erhält man die 8 einzelnen Auflagerdrücke und damit den gesamten Druck R. Die nämliche Arbeit wird auf der rechten Seite durchgeführt, wobei, falls der Bogen symmetrische Form besitzt, das Spiegelbild der ersten Figur herauskommt.

Mit R und R' und den 8 Eigengewichtslasten zeichnet man

jetzt die (punktiert ausgezogene) Drucklinie und hierauf den Cremona-Plan für Eigengewicht (Fig. 63 Mitte). Bei symmetrischer Bogenform beschränkt sich dieser Plan auf die Hälfte. Ist der Bogen im Scheitel vollwandig, so berechnet man daselbst die Spannungen an der Hand der Drucklinie mittels der Kernformel (Nr. 22). Ist der Bogen durchgehends fachwerkförmig, so kann man die Drucklinie weglassen, doch tut man gut, sie auch in diesem Falle zu zeichnen, da ihr Verlauf etwaige Fehler erkennen lässt (vgl. S. 70).

Zufällige Last.

Die beiden Kraftecke für die links- und rechtsseitigen Auflagerdrücke entsprechen zunächst der Eigengewichtslast; sie gelten aber auch für die Verkehrslasten, wenn man die Kräfte mit $p:g$ multipliziert, oder sie in einem Massstabe abgreift, der sich zu dem ursprünglichen wie $p:g$ verhält.

Zur Bestimmung der Stabkräfte schlägt man folgenden Weg ein:

Soll z. B. der Stab 3′ 4′ des Untergurtes berechnet werden, so verbindet man den Punkt A mit dem Drehpunkte des Stabes und schneidet damit die Kämpferdrucklinie an. Der Schnittpunkt ist mit 3′ 4′ bezeichnet; er bildet die Grenze für die ungünstigste Belastung (vgl. Nr. 17). Die Lasten links von diesem Punkte, also 1 bis 3, ergeben im Stabe 3′ 4′ den grössten Zug, die Lasten rechts davon, also 4 bis 9, den grössten Druck.

Um sicher zu erkennen, ob man es mit Zug oder Druck zu tun hat, denkt man sich die Lasten zerlegt und fragt, in welchem Sinne die ausserhalb des Schnittes wirkende Kraft um den Drehpunkt des Stabes dreht. Die Lasten 4 bis 9 z. B. liefern einen linken Auflagerdruck, der unterhalb des Punktes 3 vorbeigeht, also ein negatives Drehmoment erzeugt. Folglich ist die Stabkraft in diesem Falle eine Druckkraft.

Um die Grösse dieser Kraft zu finden, unterspannen wir im Polygon der linken Auflagerdrücke die Strecken 4 bis 9, d. h. wir zeichnen die Resultierende der Kräfte 4 bis 9. Dann ziehen wir durch A eine Parallele dazu und bringen sie mit der Stabrichtung 3′ 4′ zum Schnitt. Nun zerlegen wir die Kraft in üblicher Weise in zwei Teilkräfte, von denen die eine im Stabe liegt und die andere durch den Drehpunkt des Stabes geht. Die gefundene Stabkraft ist in der Figur stark ausgezogen und mit 3′ 4′ bezeichnet.

Will man die kleinste Kraft in diesem Stabe bestimmen, so kann man mit dem rechten Auflagerdruck für die Lasten 1 bis 3 in derselben Weise verfahren. Doch zieht man es meistens vor, einen Umweg einzuschlagen, der schneller zum Ziele führt. Da sich die linke und rechte Belastung zur vollen Belastung ergänzen so verhält sich ihre Summe zur Eigengewichtskraft wie p zu g, also $S_{max} + S_{min} : S_g = p : g$, woraus folgt

$$S_{\min} = \frac{p}{g} \cdot S_g - S_{\max} \,.$$

In ähnlicher Weise werden die obern Gurtstäbe behandelt. Für den Stab 3 4 z. B. findet man die Belastungsgrenze, wenn man den Punkt 4′ mit A verbindet und die Kämpferdrucklinie anschneidet. Man sieht, dass die Lasten 1 bis 5 den grössten Druck, die Lasten 6 bis 9 den grössten Zug erzeugen. Um die grösste Druckkraft zu finden, bestimmen wir erst die ausserhalb des Schnittes CC wirkende Kraft. Zu dem Zweck setzen wir den rechten Auflagerdruck für die Lasten 1 bis 3 mit dem linken Auflagerdruck für die Lasten 4 bis 5 zusammen. Ersterer geht durch B, letzterer durch A. Die Zusammensetzung lässt sich mit Hilfe der beiden Auflagerdruckpolygone leicht durchführen. Doch wird man meistens vorziehen, nicht die grösste Druckkraft, sondern die grösste Zugkraft für den Stab 3 4 zu bestimmen; dann bildet der linke Auflagerdruck für 6 bis 9 die ausserhalb wirkende Kraft. Hat man diese nach dem Schnittverfahren zerlegt und damit $S_{\min}$ gefunden, so findet sich die grösste Druckkraft des Stabes gleich wie oben

$$S_{\max} = \frac{p}{g} \cdot S_g - S_{\min} \,.$$

Soll drittens die Strebe 3 4′ berechnet werden, so verbindet man ihren Drehpunkt D mit A und findet durch Anschneiden der Kämpferdrucklinie den Grenzpunkt G der ungünstigsten Belastung. Ein zweiter Grenzpunkt wird durch den Schnitt CC gebildet. Für Lasten links von C stellt der rechte Auflagerdruck die äussere Kraft dar, die wir uns natürlich entgegengesetzt wirkend denken müssen und die daher ein negatives Moment hervorruft. Für Lasten zwischen C und G ist der linke Auflagerdruck massgebend, er dreht positiv um D. Für Lasten rechts von G findet man wieder ein negatives Drehmoment. Da die gesuchte Stabkraft stets im gleichen Sinne um D dreht wie die äussere Kraft, so ergibt sich, dass Lasten links

von C und rechts von G Druck, Lasten zwischen C und G Zug erzeugen.

Man bestimmt nun am einfachsten die grösste Zugkraft, indem man die Knotenpunkte 4 bis 6 belastet. Der linke Auflagerdruck dieser Lasten wird der Grösse nach dem linken Kraſteck entnommen; da er durch A geht, ist auch seine Lage bestimmt. Er wird, wie oben, nach dem Schnittverfahren in zwei Teilkräfte zerlegt, von denen die eine mit der Stabachse zusammenfällt und die andere durch D geht.

Das Minimum der Stabkraft wird mittels obiger Formel gefunden.

Wärmeschwankungen.

Der Einfluss der Wärmeschwankungen wird in derselben Weise bestimmt, wie es in der Nr. 21 dargelegt ist. Die Kraft T ist gleich $\frac{a\,t\,l}{w\,m}$. Sie wird parallel zu AB aufgetragen und nach Cremonas Verfahren in die Stabkräfte zerlegt.

Am Schlusse addiert man die Kräfte für Eigengewicht, zufällige Last und Temperatur und findet hierdurch die Grenzwerte sämtlicher Stabkräfte.

Beim älteren Rechnungsverfahren begeht man stets einen kleinen Fehler, wenn man kurzweg annimmt, die Knotenpunkte der oberen Gurtung seien entweder voll oder gar nicht belastet. Denn wenn die Belastung zwischen zwei Punkten endigt, trägt der eine weder die volle Last, noch geht der andere völlig leer aus. Liegt die Grenze beispielsweise in der Mitte von beiden, so treffen auf den einen $^3/_8\,P$, auf den andern $^1/_8\,P$. Der Fehler wird indessen in der Praxis vernachlässigt; denn einmal ist er meistens nicht gross, und dann werden die Stabkräfte stets grösser gefunden, als nach genauer Berechnung.

Übrigens begeht man beim Rechnen mit Einflusslinien denselben Fehler, wenn man, wie es meist geschieht, die Ordinaten in den Pfostenlinien mit dem Zirkel addiert; um genau vorzugehen, müsste man den Inhalt der Einflussfläche messen.

Ausführlicheres über das ältere Verfahren siehe in des Verfassers „Elastischer Bogen“, Zürich 1886.

Ist der zu berechnende Bogen ganz oder teilweise vollwandig, so gelten die in der Nummer 22 entwickelten Regeln. In der Hauptsache bleibt das Rechnungsverfahren das gleiche; doch treten an Stelle der Stabdrehpunkte die Kernpunkte der Querschnitte, und statt der Stabkräfte berechnet man am besten die Spannungen in den äussersten Kanten der Querschnitte, wobei man die bekannte Kernformel zu Grunde legt, nach welcher die Spannung gleich ist dem Kernmoment geteilt durch das Widerstandsmoment.

29. Bogen mit Zwischenstreben.

Bei Bogen grösserer Spannweite wird entweder die Knotenpunktsentfernung ungünstig gross, oder die Streben werden in der Nähe des Auflagers ungünstig steil. Man kann diesem Übelstande dadurch ausweichen, dass man Zwischenpfosten und Zwischenstreben anbringt (Fig. 64). Die Berechnung von Bogen dieser Art unterscheidet sich von der früheren nur wenig. Die Stabkräfte in den untern Gurtungen, in den Hauptpfosten und in den untern Hälften der Hauptstreben werden durch diese Änderung gar nicht berührt; sie sind genau so zu berechnen wie bei Bogen ohne Zwischenstreben. Eine Änderung erleiden bloss die Kräfte in den obern Gurtungen und in den obern Hälften der Hauptstreben.

Um uns ein Bild von der Einflussfläche dieser letzteren Stäbe zu verschaffen, wenden wir Betrachtungen über die elastischen Formänderungen an. Wir denken uns, die Stäbe links und rechts von dem ins Auge gefassten Felde seien zu Scheiben verbunden, wie es in der Figur durch Schraffur angedeutet ist. Dann denken wir uns, der Stab 5 7′ verkürze sich ein wenig, und forschen nach, wie sich hierbei die Fahrbahn lotrecht verschiebt.

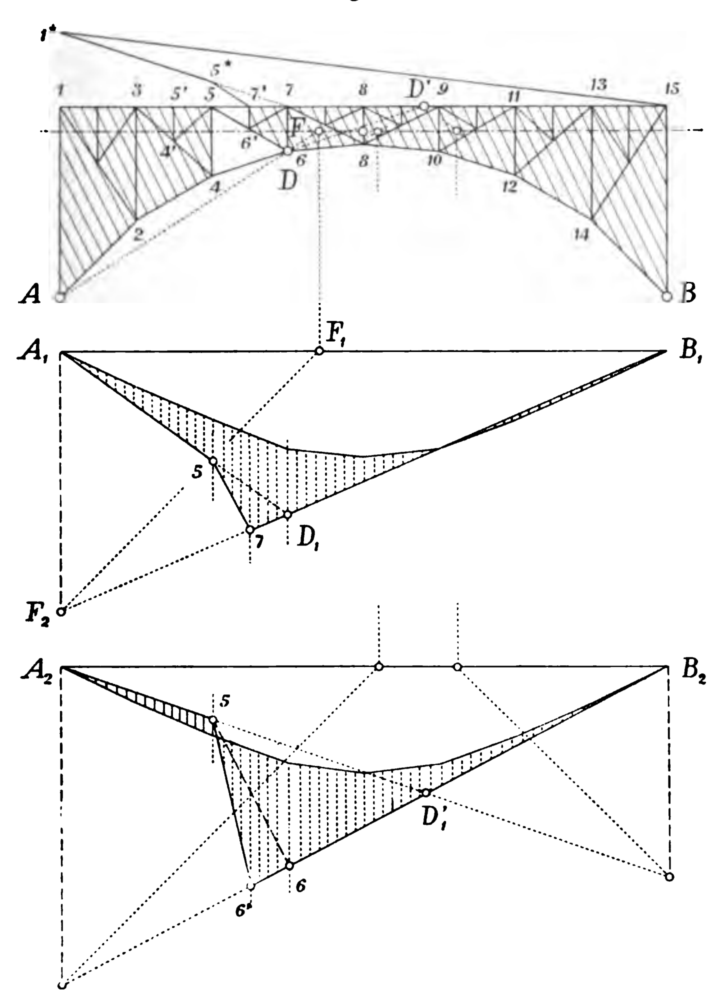
Fehlt das kleine Hängwerk 5 6′ 7, so dreht sich die linke Scheibe gegenüber der rechten um den Punkt 6, und wenn man die rechte Scheibe festhält, so nimmt die Fahrbahn die Richtung 1* 7 15 an. Durch das eingeschaltete Hängwerk wird jedoch der Punkt 7′ festgehalten und die Linie 1* 5* knickt nach diesem Punkte ab. Ohne die Zwischenstrebe würde die Einflussfläche für den Stab 5 7 durch die Linien $A_1 D_1$ und $D_1 B_1$ begrenzt. Die Zwischenstrebe hat zur Folge, dass das kleine Dreieck 5 7 D_1 hinzukommt. Man verfährt demnach genau wie früher; nur wird die Linie $A_1 D_1$ lotrecht unter 5 abgeknickt, so dass sie die Linie $B_1 D_1$ lotrecht unter 7′ trifft. Alles übrige bleibt sich gleich.

Bei der obern Hälfte der Strebe 5 6′ ist der Vorgang ein ähnlicher. Wir erhalten ihre Einflussfläche ($A_2 B_2$) wie früher, mit dem einzigen Unterschied, dass der Punkt 6′ lotrecht unter dem Zwischenpfosten liegt. Für die untere Hälfte der Strebe ist, wie früher, die Linie 5 6 massgebend.

Was endlich die Berechnung von Zwischenstrebe und Zwischenpfosten betrifft, so sind deren Kräfte vom Horizontalschub ganz

unabhängig; man bestimmt einfach die grösste auf den Zwischenpfosten treffende Last und zerlegt sie parallel zur Zwischen- und zur Hauptstrebe.

Fig. 64.



Die elastischen Gewichte Δw werden wie früher berechnet; ebenso sieht der Plan der Kräfte K genau so aus wie bei gewöhnlichen Bogen.

30. Bogen mit K-Streben.

Einen ähnlichen Zweck, wie die Bogen mit Zwischenstreben, verfolgen die in neuerer Zeit in Vorschlag gebrachten Bogen mit geknickten oder K-Streben, wie sie bei Windfachwerken bereits öfters ausgeführt worden sind. Der Bogen bleibt auch in diesem Falle einfach statisch unbestimmt. Das Netz der Fig. 65 z. B. weist 24 Punkte und 45 Stäbe auf, folglich ist

$$s + a - 2p = 45 + 4 - 48 = 1.$$

Ob man die K-Streben in sämtlichen Feldern anbringt oder nur in der Nähe der Auflager, ist hinsichtlich der statischen Berechnung gleichgültig; das erstere gibt ein einheitlicheres Bild, das letztere ist baulich vorteilhafter.

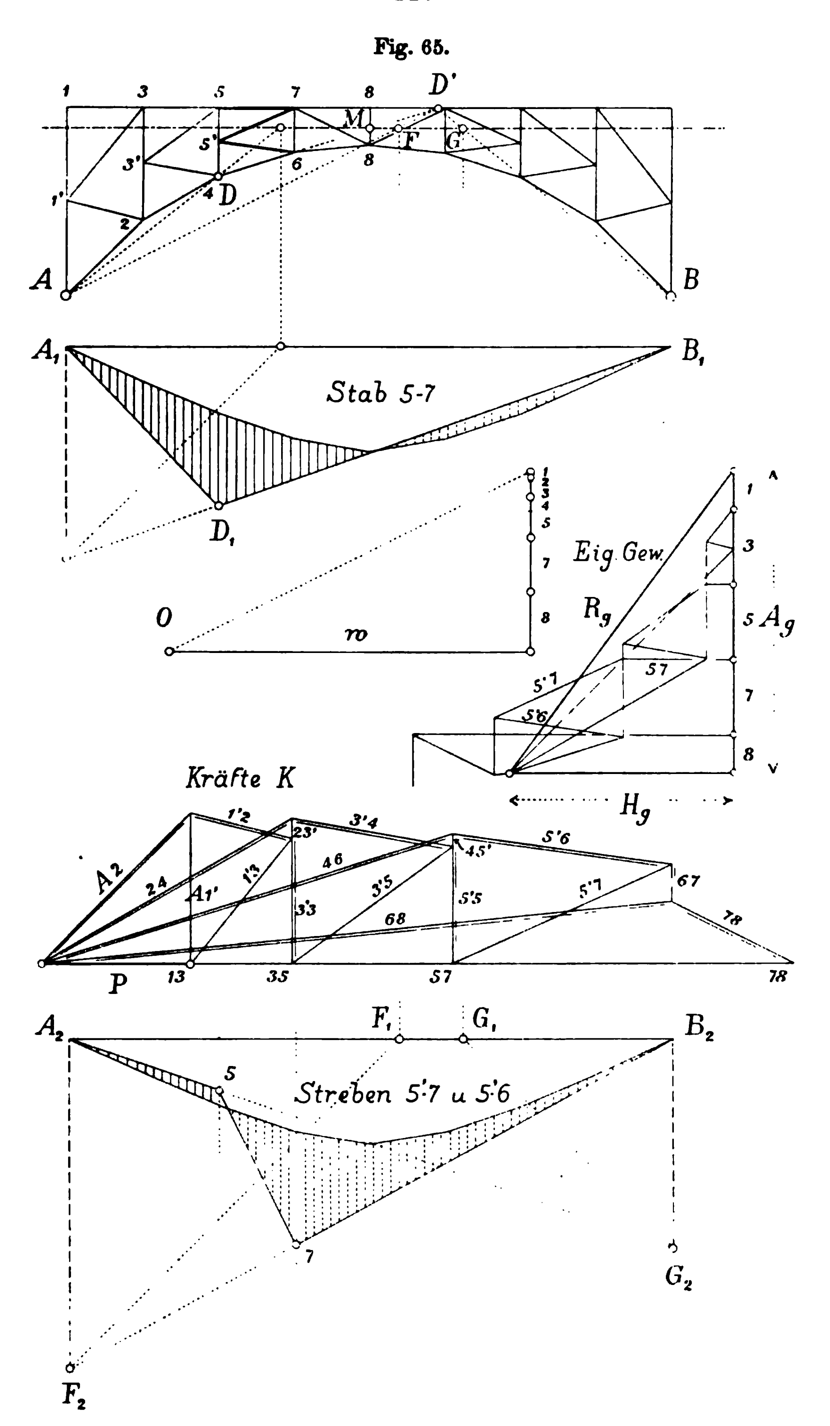
Die statische Berechnung dieser Bogenträger schliesst sich in der Hauptsache der früheren an. Doch treten namentlich hinsichtlich der Pfosten einige Änderungen auf.

Was zunächst die Drehpunkte der Gurtungen betrifft, so liegt der Drehpunkt das Stabes 1 3 in A, der des Stabes 3 5 in 2 u. s. w.; ferner der Drehpunkt des Stabes A 2 in 1, derjenige des Stabes 2 4 in 3 u. s. w. Um dies einzusehen, denken wir uns, es sei ein Querschnitt durch ein Fach, beispielsweise durch das dritte gelegt, und wir hätten irgend eine äussere Kraft nach den Richtungen der vier geschnittenen Stäbe zu zerlegen. Da die Kräfte in 5′ 6 und 5′ 7 eine lotrechte Mittelkraft haben müssen, damit im Punkte 5′ Gleichgewicht herrscht, so folgt, dass man die äussere Kraft zunächst in die Richtungen 5 7, 4 6 und 4 5 und hierauf die dritte Komponente in die Richtungen 5′ 6 und 5′ 7 zerlegen muss. Man findet also die Gurtungskräfte, wenn man sich vorstellt, der durch das Fachwerk gelegte Querschnitt treffe die beiden Gurtungen und den Pfosten 4 5; der Punkt 4 ist also der Drehpunkt für den Stab 5 7, der Punkt 5 derjenige für 4 6 und D ist der Drehpunkt für die Mittelkraft der beiden Strebenkräfte.

Auf Grund dieser Betrachtungen berechnet man nun, wie früher, für sämtliche Gurtungen die elastischen Gewichte $\Delta w = \frac{s\,y}{E\,F\,a^2}$ und zeichnet mit ihnen das Seileck $A_1\,B_1$. Ferner bestimmt man den Schwerpunkt M der Gewichte und zieht durch ihn die M-Linie. Der Horizontalschub für eine Einzellast ist dann, wie immer,

$$H = \frac{P \, . \, z}{m} \, .$$

Fig. 65.



D'
M
F
G
D
A
B
A₁
B₁
Stab 5-7
D₁
Eig. Gew.
R_g
A_g
H_g
O
Kräfte K
P
A₂
F₁
G₁
B₂
Streben 5'7 u 5'6
G₂
F₂

Hiernach lässt sich der Horizontalschub für das Eigengewicht ableiten (Nr. 18) und mit seiner Hilfe ein Cremona-Plan für Eigengewicht zeichnen (Fig. 65). Für die Pfosten findet man hierbei stets zwei Kräfte, die eine für die obere, die andere für die untere Hälfte.

Ferner lassen sich die Einflussflächen für die Gurtungen genau nach dem früheren Verfahren zeichnen, nur mit dem Unterschiede, dass für beide Gurtungen der Drehpunkt im äussern Endpunkt des Gegenstabes liegt. Für den Stab 5 7 ist die Einflussfläche in der Fig. 65 gezeichnet.

Auch für die Streben gilt, was die Einflussfläche betrifft, das frühere Verfahren. Die Figur $A_2\,B_2$ enthält die Einflussfläche für die beiden Halbstreben 5′ 7 und 5′ 6.

Der Plan der Kräfte K stösst ebenfalls auf keine Hindernisse. Nur macht die Bezeichnung etwas Schwierigkeiten. Wir haben, um volle Deutlichkeit zu erzielen, jede Stabkraft in ihrer Mitte mit den

Fig. 66.

beiden Endnummern bezeichnet; nur bei den obern Gurtungen stehen die beiden Nummern je am Ende der Kraft. Druckkräfte sind durch einen Doppelstrich hervorgehoben.

Es fragt sich schliesslich nur noch, wie die Einflussflächen für die Pfosten gefunden werden.

Um diese Frage zu beantworten, denken wir uns, der Stab, dessen Einflussfläche bestimmt werden soll, erfahre eine Längenänderung, und bestimmen die Form, in welche hierbei die Fahrbahn übergeht. Wir denken uns, der Stab 7 7′ (Fig. 66) verlängere sich, während die Stäbe links und rechts zu starren Scheiben verbunden seien. Dann fragen wir uns, wie sich die Scheibe links von 4 5 dreht, während die Scheibe rechts von 6 7 festgehalten wird.

Die beiden Scheiben sollen durch Gelenke in 4 und 6 miteinander verbunden sein. Ihr Drehpunkt muss dann zunächst auf der Linie 4 6 liegen. Ferner dreht sich das Dreieck 5 5′ 7 gegenüber der rechten Scheibe um den Schnittpunkt von 7 8 und 5′ 6, also um D', und gegenüber der linken Scheibe um den Punkt 5. Der gesuchte Drehpunkt liegt also auch auf der Verbindungslinie

Fig. 67.

von D' und 5, somit im Schnittpunkte von 4 6 mit D' 5, d. h. in D. Ist die obere Gurtung geradlinig, so fällt D einfach in den Schnitt von 4 6 mit 5 8. Bei dieser Drehung nimmt die Fahrbahn die Form 1* 5* 7* 8 15 an. Überträgt man diese Form in die Seilkurve A_1 B_1, so bekommt man die Einflussfläche für den Stab 7 7'.

Verkürzt sich ferner der Stab 6 7' (Fig. 67), so dreht sich das Dreieck 5 5' 7 gegenüber den beiden Scheiben einmal um 7 und dann um 5, folglich liegt der Drehpunkt D auf der Linie 5 7. Sodann bewegt sich der Punkt 6 senkrecht zu 6 8 und der Punkt 5' senkrecht zu 5' 7. Das Dreieck 4 5' 6 dreht sich somit um den Schnittpunkt D' von 6 8 mit 5' 7. Das Dreieck ist aber mit der linken Scheibe durch das Gelenk 4 verbunden, folglich liegt der gesuchte Drehpunkt D auch auf der Linie D' 4, also in D. Die Fahrbahn nimmt daher die Form 1* 5* 7 an. Auf Grund dieser Betrachtungen ist es leicht, die Einflussfläche für den Stab 6 7 zu zeichnen.

31. Bogenkragträger.

Unter Bogenkragträgern (Fig. 68) sind Träger zu verstehen, die zwei feste Auflager A und B besitzen und nach beiden Seiten ohne weitere Unterstützungspunkte vorkragen. Die Balken CD und EF, welche die vorkragenden Teile mit den Widerlagern verbinden, sind als einfache Balkenträger aufzufassen, die an ihren Endpunkten frei aufliegen, sogenannte „Schleppträger“. Liegen dagegen die vorkragenden Teile an ihren Endpunkten auf den Widerlagern auf, so entstehen kontinuierliche Bogenträger.

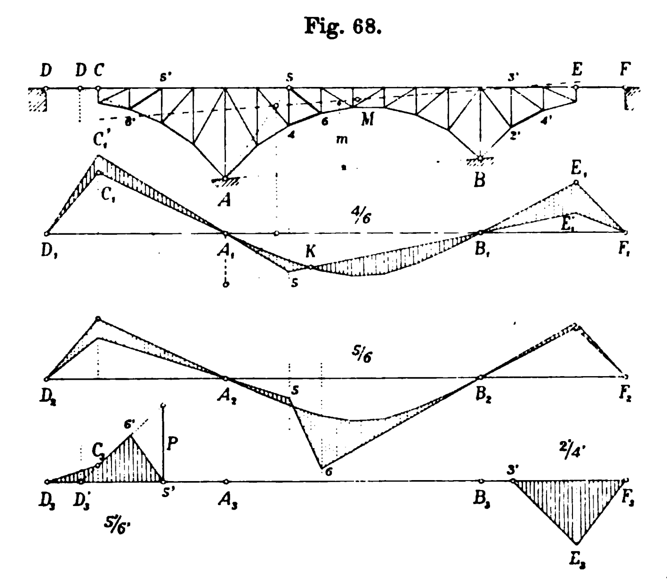
Die vorkragenden Teile AC und BE verhalten sich in statischer Hinsicht wie Balkenfachwerke; die Stabkräfte sind von dem in der Richtung AB wirkenden Horizontalschub unabhängig. Letzterer übt seinen Einfluss bloss auf die Stäbe zwischen A und B aus. Wohl aber beeinflussen Lasten, die sich auf den Kragteilen befinden, den Horizontalschub und damit auch die Stäbe zwischen A und B. Die statische Berechnung solcher Träger gestaltet sich am übersichtlichsten mittels Einflusslinien.

Was zunächst die Einflusslinie für den Bogenschub betrifft, so verschaffen wir uns von deren Verlauf ein Bild, wenn wir annehmen, der Schub gelange zur Wirkung und prüfen, wie sich hierbei die Fahrbahn deformiert. (Vgl. Teil III, S. 264.) Der Trägerteil AB wird

hierbei eine gekrümmte Form annehmen, die beiden Kragteile dagegen werden, da sie vom Bogenschub unabhängig sind, geradlinig bleiben. Ebenso bleiben die Schleppträger geradlinig; sie drehen sich jedoch um die Gelenke C und E.

Um die Einflusslinie für H zu zeichnen, berechnen wir, wie früher, für den Teil AB die elastischen Gewichte Δw, lassen sie erst lotrecht, dann wagrecht als Kräfte wirken und zeichnen dazu zwei Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (in unserer Figur weggelassen). Diese führen zu dem Schwerpunkte M und der Strecke m. Die

Fig. 68.



erste Seite des Seilecks $A_1 B_1$ wird hierauf geradlinig bis zum Punkte C_1 verlängert und C_1 mit D_1 durch eine Gerade verbunden. In derselben Weise wird rechts von B_1 verfahren. So wird die Einflusslinie $D_1 C_1 A_1 B_1 E_1 F_1$ gefunden. Wie man sieht, wird der Bogenschub durch Lasten zwischen A und B vergrössert, durch Lasten ausserhalb AB verringert. Der Bogenschub kann somit unter Umständen die entgegengesetzte Richtung annehmen (negativer Horizontalschub). Nennt man die Ordinaten der Einflussfläche z, so ist der Schub für eine Reihe von Lasten $H = \frac{P \cdot \Sigma(z)}{m}$.

Aus der Einflusslinie für den Bogenschub ergeben sich sodann, ähnlich wie früher, die Einflusslinien für die Stabkräfte. Die Fig. $A_1 B_1$

stellt die Einflussfläche für den Gurtstab 4 6 dar. Die Linien A_1 5 und B_1 5 werden genau wie früher gezeichnet. Dann verlängert man diese Linien bis C_1' und E_1' und verbindet endlich C_1' mit D_1 und E_1' mit F_1. Die Einflussfläche ist von D bis A und von K bis B positiv, von A bis K und von B bis F negativ. Lasten auf den beiden ersten Strecken beanspruchen den Stab 4 6 auf Druck, Lasten auf den beiden letzten Strecken auf Zug.

Die Figur $A_2 B_2$ zeigt sodann, wie die Einflussfläche für die Strebe 5 6 gefunden wird. Eine Erläuterung dürfte nicht nötig sein.

Um die Stabkräfte zu erhalten, hat man, wie früher, zuerst die Kraft P in der Richtung AB wirken zu lassen und einen Cremona-Plan dazu zu zeichnen. Nennt man die Kräfte dieses Planes K, so gilt für die Stabkraft die Formel $S = \frac{K \cdot \Sigma(z)}{m}$. (S. 75.)

Was schliesslich die vorkragenden Teile des Bogens betrifft, so zeichnet man deren Einflusslinien nach den für Balkenfachwerke üblichen Regeln. (Vgl. Teil III, S. 264.) In der Figur $A_3 B_3$ ist rechts die Einflussfläche für den Gurtstab 2′ 4′ gezeichnet. Man zieht von 3′ aus eine Linie unter 45° bis zum Punkte E_3 und verbindet E_3 mit F_3. Dadurch erhalten wir zunächst die Einflusslinie für die Momente des in B eingespannt zu denkenden, freitragenden Balkens BE. Das Biegungsmoment ist ja gleich Kraft mal Abstand von B_1 oder, da wir 3′ E_3 unter 45° gezogen haben, gleich Kraft mal z, wo z die Ordinaten der Einflussfläche bedeuten. Zu gleicher Zeit stellt das Dreieck 3′ $E_3 F_3$ aber auch die Einflussfläche für den Gurtstab dar, da seine Kraft gleich $\frac{P \cdot \Sigma(z)}{a}$ ist, worin a die Entfernung des Stabes von seinem Drehpunkte bedeutet.

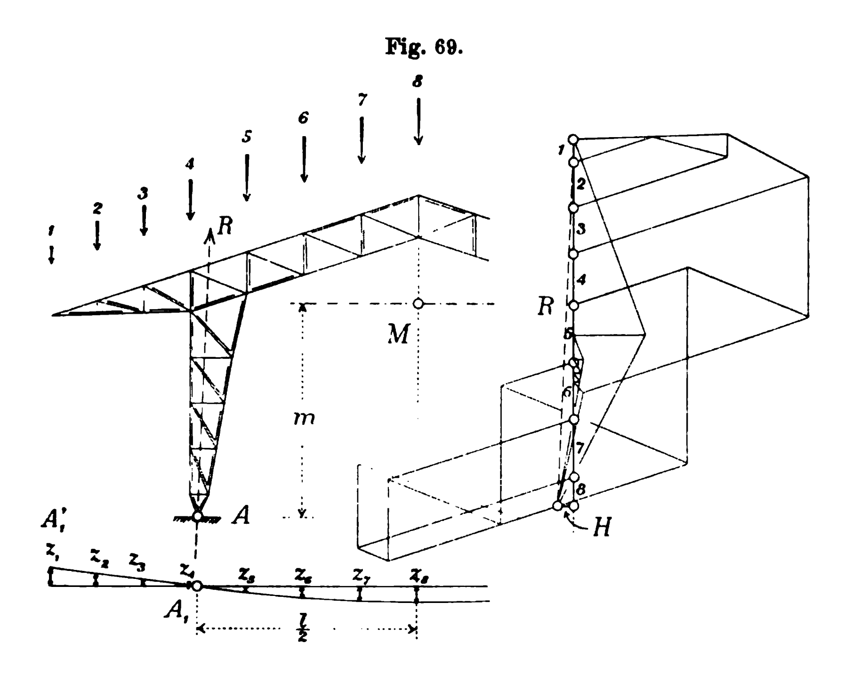
In derselben Figur ist links die Einflussfläche für die Strebe 5′ 6′ dargestellt. Man lotet den Drehpunkt der Strebe herunter nach D_3', trägt lotrecht unter 5′ die Last P auf und verbindet ihren Endpunkt mit D_3'. Dann wird die Übergangslinie 5′ 6′ gezogen und C_3 mit D_3 verbunden. Werden die Ordinaten der Fläche mit z bezeichnet, so ist die lotrechte Komponente der Stabkraft einfach gleich $\Sigma(z)$. (Vgl. Teil III, S. 267). Man trägt diese Summe (als Kraft) lotrecht auf und zerlegt sie wagrecht und parallel zur Strebe.

Wie die Einflussflächen benutzt werden, um die Stabkräfte für Eigengewicht und zufällige Lasten zu berechnen, braucht nicht

näher erklärt zu werden. Der Gang der Arbeit unterscheidet sich in keiner Weise von dem in früheren Abschnitten beschriebenen. Der Einfluss der Wärmeschwankung äussert sich bloss auf die Stäbe zwischen *A* und *B* und wird ebenfalls nach bekannter Regel ermittelt. —

Zu den Bogenkragträgern muss auch der durch Fig. 69 dargestellte Dachstuhl gerechnet werden. Wir denken ihn uns durch

Fig. 69.



lotrecht wirkende Lasten beansprucht und wollen nun die in den Stäben auftretenden Kräfte bestimmen. Zuerst werden nach bekannten Regeln die *H*-Fläche und der Punkt *M* konstruiert und der Bogenschub nach der Formel $H = \frac{P \cdot \Sigma(z)}{m}$ bestimmt. Wie aus der Figur zu ersehen ist, wird er sehr klein, da die Lasten ausserhalb der Gelenke, auf den vorkragenden Teilen, den innerhalbliegenden entgegenwirken. Durch Zusammensetzen der Hälfte der äusseren Kräfte mit dem Horizontalschub wird der Auflagerdruck *R* gefunden. Ein Cremona'scher Kräfteplan führt nun ohne weitere Schwierigkeiten zum Ziel. Wie der Dachstuhl auf Winddruck berechnet wird, erläutert Nr. 25.

32. Bogen mit konstantem Trägheitsmoment.

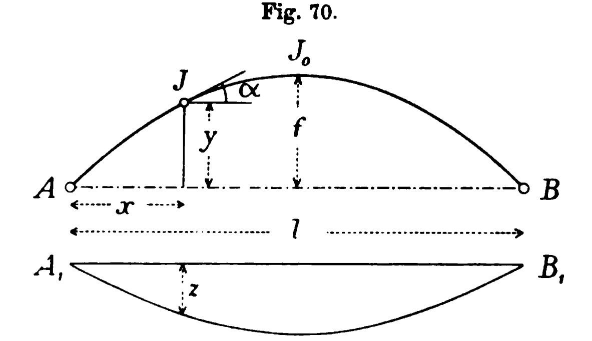
Wenn der Querschnitt des Bogens konstant ist, so kann die statische Berechnung durch einige einfache Formeln abgekürzt werden. Am einfachsten werden diese Formeln, wenn man annimmt, die Achse des Bogens sei parabolisch und das Trägheitsmoment des Querschnittes ändere sich proportional der Sekante des Neigungswinkels der Bogenachse, also (Fig. 70)

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2},$$

$$J = \frac{J_0}{\cos\alpha} = J_0 \frac{ds}{dx}.$$

Nach dieser Gleichung nimmt das Trägheitsmoment vom Scheitel nach den Auflagern hin langsam zu, eine Annahme, die mit der

Fig. 70.



Wirklichkeit gewöhnlich noch besser übereinstimmt, als die Annahme eines ganz konstanten Trägheitsmomentes.

Auf Grund dieser beiden Annahmen ergeben sich folgende einfache Beziehungen und Formeln.

Einflusslinie für den Horizontalschub.

Wir denken uns den Bogen in unendlich kleine Elemente von der Länge ds zerlegt. Das elastische Gewicht eines Elementes ist dann

$$dw = \frac{y \cdot ds}{E \cdot J} = \frac{y \cdot dx}{E \cdot J_0} = \frac{4fx(l-x)\,dx}{EJ_0 l^2}$$

und die Summe aller Gewichte

$$w = \int_0^l dw = \frac{2fl}{3EJ_0}.$$

Um die Einflusslinie für den Bogenschub zu erhalten, lässt man die Gewichte dw als lotrechte Kräfte wirken und zeichnet dazu eine Seilkurve.

Die Differenzialgleichung der Seilkurve lautet allgemein

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = - \frac{p}{H},$$

worin p die Belastung auf die Längeneinheit und H die Polweite bedeutet. Im vorliegenden Falle ist die Belastung $p = \frac{dw}{dx}$ und die Polweite $H = w$; also ist

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = - \frac{dw}{w \cdot dx} = - \frac{4 f x (l - x)}{w E J_0 l^2}.$$

Die Integrationskonstanten lassen sich aus der Bedingung ableiten, dass z für $x = 0$ und für $x = l$ verschwinden muss. Unter diesen Bedingungen führt die Rechnung zu der Gleichung

$$z = \frac{x (l - x)(l^2 + l x - x^2)}{2 l^3}.$$

Setzt man $x:l =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
so wird $z:l =$	0,000	0,049	0,093	0,127	0,149	0,156	0,149

	0,7	0,8	0,9	1,0,
	0,127	0,093	0,049	0,000.

Mit Hilfe dieser Zahlentabelle lässt sich das Aufzeichnen der H-Linie rasch bewerkstelligen.

Lage der M-Linie.

Um die Entfernung der M-Linie von der Bogensehne zu erhalten, betimmen wir den Schwerpunkt sämtlicher Gewichte dw. Diese Gewichte wirken nicht in den Mittelpunkten der Elemente, sondern in den Antipolen der Bogensehne hinsichtlich der einzelnen Elastizitätsellipsen. (Vgl. Nr. 22.) Hierbei ist es gestattet, anzunehmen, dass die Antipole lotrecht über den Mittelpunkten der Elemente liegen. Der Abstand beider Punkte ist nach der Theorie der Trägheitsellipsen $c = \frac{i^2}{y}$ oder, für $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$,

$$c = \frac{J}{F y},$$

wobei man genau genug J_0 an Stelle von J setzen darf. Hiernach ergibt sich die Gleichung

$$w \cdot m = \int_0^l (y + c)\, d w = \int_0^l \left(y + \frac{J}{F \cdot y}\right) \cdot \frac{y\, d x}{E J} = \frac{8 f^2 l}{15 E J} + \frac{l}{E F}$$

oder, wenn man für w obigen Wert einsetzt,

$$m = 4/5 f + \frac{3 J}{2 F f} \cdot$$

Kämpferdrucklinie.

Nach den Bezeichnungen der Fig. 71 verhält sich $k : x = m : z'$ und $z' : z = l : (l - x)$. Führt man obigen Ausdruck für z ein, so folgt

$$k = \frac{2 l^2 m}{l^2 + l x - x^2} \cdot$$

Die Kämpferdrucklinie ist eine Kurve dritten Grades. Für $x = 0$

Fig. 71.

und $x = l$ wird $k = 2 m$; für $x = 1/2\, l$ wird $k = 8/5\, m$. Für $x = 1/2 (1 - \sqrt{5})\, l$ und für $x = 1/2 (1 + \sqrt{5})\, l$ wird k unendlich gross; für $x = \infty$ wird $k = 0$; die lotrechten Linien a und die Bogensehne sind daher die Asymptoten der Kurve.

Setzt man $x:l =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0,
so wird $k:m =$	2,000	1,835	1,724	1,653	1,613	1,600	1,613	1,653	1,724	1,835	2,000.

Horizontalschub, Drucklinie und Spannungen für Eigengewicht.

Der Inhalt der Einflussfläche $A_1 B_1$ (Fig. 70) ergibt sich

$$\int_0^l z \, . \, dx = \frac{l^3}{10};$$

folglich ist der Bogenschub für Eigengewicht

$$H = \frac{g \, l^3}{10 \, m}.$$

Ist das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes unendlich klein, so wird $m = 4/5 \, f$ und $H = \frac{g \, l^2}{8 f}$. In diesem Falle deckt sich die Drucklinie für Eigengewicht mit der parabolischen Bogenachse. In allen andern Fällen liegt die Drucklinie höher als die Bogenachse.

Je grösser das Trägheitsmoment J, desto mehr weicht die Drucklinie von der Bogenachse ab. Die Ordinaten beider Kurven, bezogen auf die Bogenachse, verhalten sich wie $4/5 \, f$ zu m. Bezeichnet man den Ordinatenunterschied beider Kurven mit v, so verhält sich $v:y = (m - 4/5 \, f):4/5 \, f$; es ist daher

$$v = \frac{15 \, J \, y}{8 \, E f^2}.$$

Hieraus ergibt sich das Biegungsmoment für Eigengewicht an einer beliebigen Stelle

$$M = H \, . \, v = \frac{3 \, g \, l^3 \, J}{16 \, m \, F f^2} \, . \, y.$$

Mit Hilfe der Formeln für H und M lassen sich die Spannungen für Eigengewicht nach den gewöhnlichen Regeln der Festigkeitslehre leicht berechnen, es ist für beliebige Querschnitte die Spannung

$$\sigma_g = \frac{H \, . \cos \alpha}{F} \pm \frac{M}{W}.$$

Zur Berechnung von $\cos\alpha$ kann man die Formel

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{l^2}{\sqrt{l^4 + 16 f^2 (l-2x)^2}}$$

benutzen.

Alle diese Beziehungen gelten nur unter der Voraussetzung, dass die Bogenachse parabolisch ist; folgt die Bogenachse einer andern Kurve, so besitzen die Formeln nur angenäherte Gültigkeit, und es ist für genauere Rechnungen das gewöhnliche zeichnerische Verfahren anzuwenden.

Einfluss der zufälligen Belastung.

Um die Spannungen zu berechnen, welche die zufällige Belastung im Bogenträger hervorruft, zeichnet man am besten Einflussflächen und verfährt nach den früher abgeleiteten Regeln. Einzig die K-Spannungen, d. h. die Spannungen, die eine in A wagrecht angreifende Kraft P erzeugt, lassen sich leicht rechnerisch bestimmen; sie sind nach den Regeln der Festigkeitslehre

$$\sigma_k = \frac{P.\cos\alpha}{F} \pm \frac{P.y}{W}.$$

Für die Berechnung der grössten und kleinsten Spannungen Formeln abzuleiten, ist zu umständlich und gehört nicht in ein Buch über graphische Statik. Nur für den Fall, dass das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes verschwindend klein ist, ergeben sich bequem brauchbare Formeln.

Ist nämlich J unendlich klein, so fallen die Kernpunkte mit der Bogenachse zusammen, so dass sich die Grenzpunkte der ungünstigsten Belastungen und daran anschliessend die grössten und kleinsten Biegungsmomente nach verhältnismässig einfachen Formeln berechnen lassen.

Nach früher wird die Belastungsgrenze für den Querschnitt C gefunden, wenn man die Linie AC zieht und die Kämpferdrucklinie anschneidet. Nach den Bezeichnungen der Fig. 72 verhält sich $x:y = v:k$, woraus für $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$, $k = \frac{2l^2 m}{l^2 + lv - v^2}$ und $m = 4/5 f$ folgt

$$x = l - \frac{2l^4}{5v(l^2 + lv - v^2)}.$$

Belastet man den Bogen von E bis L, so wird das Biegungsmoment für den Schnitt C ein Maximum. In diesem Falle ist der lotrechte Auflagerdruck

$$A = \frac{p(l-v)^2}{2l}$$

und der Horizontalschub

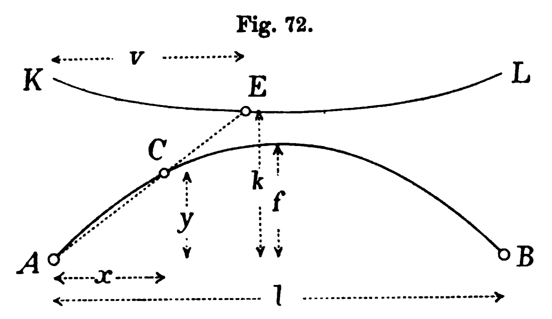
$$H = \frac{p}{m} \cdot \int_v^l z \, . \, dx \quad \text{oder} \quad H = \frac{p(2l^5 - 5l^3v^2 + 5lv^4 - 2v^5)}{16fl^3} \, .$$

Hieraus ergibt sich das Biegungsmoment

$$M = A \, . \, x - H \, . \, y = -\frac{p(2l + 3v)(l-v)^4 x(l-x)}{4l^5} \, .$$

Dieser Ausdruck gibt zunächst das grösste negative Biegungsmoment für den Querschnitt C; das grösste positive Moment ist

Fig. 72.



jedoch gleichgross, da die beiden ungünstigsten Belastungen sich zur vollen Belastung ergänzen und für diese die Drucklinie mit der Bogenachse zusammenfällt.

Die nachstehende Tabelle enthält für verschiedene Werte von v die entsprechenden x, H und M. Die Tabelle ist so eingerichtet, dass die x von Zwanzigstel zu Zwanzigstel der Spannweite wachsen; die zugehörigen v wurden durch probieren bestimmt.

Hat man die Werte H und M für einen Querschnitt berechnet, so ist die entsprechende grösste Spannung

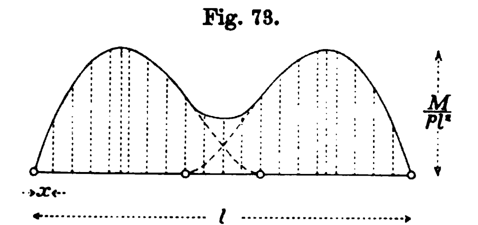
$$\sigma_p = \frac{H \, . \cos \alpha}{F} \pm \frac{M}{W} \, .$$

In der Fig. 73 sind die Biegungsmomente nach den Zahlen der Tabelle aufgetragen; sie bilden eine Kurve, die in A beginnt und bei $x = 0{,}6 \, l$ endigt. Auch die symmetrische Kurve ist gezeichnet. Man erkennt bald, dass in den Querschnitten von $0{,}4 \, l$ bis $0{,}6 \, l$ die

ungünstigste Belastung aus zwei Teilen besteht; auf dieser Strecke müssen die Ordinaten beider Kurven addiert werden.

Das grösste Biegungsmoment tritt für $x = 0{,}2297\ l$ ein und

Fig. 73.



beträgt $0{,}0165\ p\,l^2$; das kleinste befindet sich in der Mitte der Spannweite und beträgt $0{,}0074\ p\,l^2$.

$v:l$	$x:l$	$H:\frac{pl^2}{f}$	$M:pl^2$
0,339	0,00	0,0923	0,0000
0,344	0,05	0,0918	0,0062
0,361	0,10	0,0890	0,0115
0,381	0,15	0,0853	0,0147
0,403	0,20	0,0814	0,0163
0,4177	0,2297	0,0785	0,0165
0,428	0,25	0,0765	0,0164
0,458	0,30	0,0705	0,0153
0,492	0,35	0,0640	0,0131
0,534	0,40	0,0558	0,0102
0,585	0,45	0,0462	0,0069
0,652	0,50	0,0340	0,0037
0,748	0,55	0,0185	0,0011
1,000	0,60	0,0000	0,0000

Einfluss der Wärmeschwankung.

Sehr einfach lässt sich bei einem Bogenträger mit konstantem Trägheitsmoment der Einfluss der Wärmeschwankung berechnen. Gemäss den Erörterungen in Nr. 21 ist die Temperaturkraft $T = \frac{\alpha t l}{w m}$, worin α den Ausdehnungskoeffizient des Eisens und t die Anzahl Grade bezeichnet. Setzt man für w den oben abgeleiteten Wert, so wird

$$T = \frac{3 \alpha t E J}{2 f m}.$$

Die Grösse von m ist auf S. 126 angegeben.

Die Wärmeschwankung erzeugt in Eisen Spannungen, die sich nach der Formel

$$\sigma = \frac{T \cdot \cos\alpha}{F} \pm \frac{T \cdot y}{W}$$

berechnen lassen.

Die in dieser Nummer abgeleiteten Formeln gelten zunächst für einen vollwandigen Bogen. Sie lassen sich jedoch leicht auf Fachwerkbogen übertragen und geben auch hier gute Resultate, sobald die am Anfang aufgestellten Bedingungen einer parabolischen Achse und eines nach der Sekante abnehmenden Trägheitsmomentes annähernd erfüllt sind. Um die Formeln auf einen fachwerkförmigen Bogen anzuwenden, ersetzt man J durch $\frac{1}{2} F_g h^2$ und die Fläche durch $2 F_g$, wo F_g die (durchschnittliche) Querschnittsfläche einer Gurtung und h die Bogenhöhe bezeichnet; der Trägheitshalbmesser i wird gleich $\frac{1}{2} h$.

33. Vorläufige Berechnung eines Bogenträgers.

Alle bisherigen Entwicklungen setzen voraus, dass die Querschnittsmasse des zu berechnenden Bogens bekannt sind. Dies ist der Fall, wenn ein Bogen berechnet werden soll, der bereits besteht oder im Entwurfe vorliegt. Handelt es sich jedoch um eine neue Brücke, von der nichts als das Netz und die Belastungen bekannt sind, so muss der endgültigen Berechnung im allgemeinen eine vorläufige oder angenäherte vorangehen. Erst an der Hand der Ergebnisse dieser ersten Berechnung kann die zweite oder endgültige vorgenommen werden. Man geht dabei je nach Umständen verschieden vor.

a) Fachwerkbogen mit geradem Obergurt.

Bei Fachwerkbogen mit geradem Obergurt schätzt man die relativen Querschnitte der beiden Gurtungen und führt, darauf gestützt, die vorläufige Berechnung in der gewöhnlichen Weise durch. Die Querschnittsfläche der untern Gurtung ändert sich meistens nicht stark, diejenige der obern Gurtung dagegen ist stets an den Auflagern klein und nimmt gegen den Scheitel hin zu. Man nimmt nun am besten an, im Scheitel seien beide Gurtungen gleichgross,

die untere bleibe auf der ganzen Spannweite konstant, die obere aber nehme gegen die Auflager allmählich ab. Für mittlere Spannweiten kann man die Scheitelquerschnitte gleich 3 setzen und die obere Gurtung bis auf 1 abnehmen lassen. Für grössere Weiten wählt man an Stelle von 3 die Zahl 4 oder 5.

Auf Grund dieser Annahmen lässt sich die erste Berechnung ohne Schwierigkeit durchführen. Man berechnet die Gewichte $\varDelta w$, wobei man $E = 1$ setzt, zeichnet das Seileck $A_1 B_1$, bestimmt die M-Linie, berechnet den Einfluss des Eigengewichtes mittels eines Cremona-Planes, zeichnet die Einflussflächen für die Stäbe, ermittelt mit ihrer Hilfe den Einfluss der zufälligen Last u. s. w. Die Strebenkräfte lässt man hierbei ganz beiseite, da ihre Querschnitte zur endgültigen Berechnung nicht nötig sind.

Eine kleine Schwierigkeit tritt bei der Bestimmung der Temperaturkräfte ein, da hier die wirklichen Querschnittsflächen massgebend sind. Man behilft sich wie folgt. Nachdem die Stabkräfte für Eigengewicht und Verkehrslast ermittelt sind, bestimmt man ihnen entsprechend zunächst die Querschnittsflächen der Gurtungen am Scheitel; sie seien F. Führt man nun bei der Berechnung der $\varDelta w$ anstatt der Zahl 3 die Grösse F ein, so verkleinern sich alle $\varDelta w$ im Verhältnis 3 zu F. Die Temperaturkraft ist daher nach der Formel

$$T = \frac{E \alpha t l}{w m} \cdot \frac{F}{3}$$

zu berechnen.

Man hat empfohlen, die vorläufige Berechnung der Bogen mit geradem Obergurt unter der Annahme eines Scheitelgelenkes durchzuführen; dadurch wird der Bogen statisch bestimmt und zu seiner Berechnung ist die Kenntnis der Querschnittsflächen unnötig. Doch stösst man dabei auf die schwierige Frage, an welcher Stelle der Scheitelfuge man das Gelenk annehmen soll. Die Ergebnisse sind deshalb unsicher, und ausserdem wird durch dieses Hilfsmittel nicht viel Zeit gewonnen.

Wird ein Bogen nach obigem Verfahren berechnet, so ergibt sich in der Regel, dass in der Nähe des Scheitels die obere Gurtung stärker beansprucht wird als die untere. Man ist geneigt, hiernach jener eine grössere Querschnittsfläche zu geben als dieser. Geschieht dies, so rücken jedoch die Drucklinien bei der zweiten Berechnung etwas in die Höhe und infolgedessen wird die Kraft in der obern

Gurtung noch grösser, die in der untern noch kleiner, als das erste Mal. Führt man die Rechnung ein drittes, ein viertes Mal, unter fortwährender Abänderung der Querschnittsflächen durch, so nimmt die obere Gurtung beständig zu, die untere ab und man kommt nie zu einem befriedigenden Ziele. Hier hilft nur ein Ausweg, nämlich den Querschnitt der untern Gurtung stärker zu machen, als er nach der Rechnung sein sollte, und zwar (entsprechend der ursprünglichen Annahme) ebensogross wie den der obern. Der Einwand, dass hierdurch Material verschwendet werde, ist nicht stichhaltig; bei statisch unbestimmten Fachwerken lässt sich das Anbringen scheinbar überflüssigen Materials in manchen Fällen schlechterdings nicht umgehen.

b) Fachwerkbogen mit gekrümmtem Obergurt.

Die unter a) angegebenen Regeln lassen sich ohne weiteres auch auf Bogen mit gekrümmtem Obergurt übertragen. Ändert sich die Bogenhöhe h, d. h. der gegenseitige Abstand der beiden Gurtungen stark, wie z. B. bei sichelförmigen Bogen, so ist das vorhin beschriebene Rechnungsverfahren das geeignetste. Die Gurtungsquerschnitte nimmt man dabei am besten konstant (gleich eins) an. Ändert sich dagegen die Bogenhöhe nur ein wenig, so gelangt man bequemer zum Ziele, wenn man das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes als konstant betrachtet und die Ergebnisse der vorigen Nummer anwendet. Die Berechnung der Stabkräfte gestaltet sich in diesem Falle wie folgt:

Um die Einflusslinie für den Bogenschub zu zeichnen, wendet man die Formel

$$z = \frac{x(l-x)(l^2 + lx - x^2)}{2l^3}$$

bezw. die auf Seite 125 berechneten Zahlen an. Die Lage der M-Linie bestimmt man nach der Formel $m = 4/5 f + \frac{3J}{2Ff}$; dabei setzt man $J = Fi^2$ und $i = \frac{1}{2}h$, also

$$m = 4/5 f + \frac{3h^2}{8f}.$$

Ist die Bogenhöhe veränderlich, so setzt man einen Mittelwert ein. Den Bogenschub für Eigengewicht berechnet man nach der Formel

$$H = \frac{gl^2}{10m}$$

und die Biegungsmomente für Eigengewicht nach der Formel

$$M = \frac{3\,g\,l^2\,h^2}{64\,m\,f^2} \cdot y$$

(vgl. S. 127).

Den Einfluss der Verkehrslast bestimmt man durch Zeichnen der Einflusskurven nach dem gewöhnlichen Verfahren. Die K-Kräfte werden durch einen Cremona'schen Kräfteplan bestimmt. Will man die Arbeit abkürzen, so berechnet man nur jeden zweiten oder dritten Gurtstab und bestimmt die dazwischen liegenden Kräfte durch Interpolieren.

Wesentlich kürzer wird die Arbeit, wenn man das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes unendlich klein annimmt und die Formeln und Tabellen auf den Seiten 128—130 anwendet; doch ergeben sich die Stabkräfte in diesem Falle etwas zu klein.

Die Temperaturkraft ergibt sich nach Nr. 32

$$T = \frac{3\,\alpha\,t\,E\,F\,h^2}{8\,f\,m}$$

und die entsprechenden Stabkräfte nach der Formel

$$S_t = \frac{T\,K}{P},$$

worin P die Kraft bedeutet, die dem Plane der K-Kräfte als Ausgang diente, also die auf einen Pfosten treffende Verkehrslast.

Man beschränkt die vorläufige Berechnung auch hier auf die Gurtungskräfte und bestimmt die Strebenkräfte erst bei der endgültigen Berechnung.

Auch hier gilt die Bemerkung, dass man für die obere Gurtung in der Regel eine grössere Gesamtkraft erhält als für die untere, dass man jedoch gut tut, der untern Gurtung nichtsdestoweniger dieselbe Querschnittsfläche zu geben, welche die obere verlangt.

c) Vollwandige Bogen.

Zur vorläufigen Berechnung von vollwandigen Bogen eignen sich die Formeln und Regeln der Nr. 32 ganz besonders gut. Während wir jedoch in dieser Nummer darauf ausgingen, die Spannungen σ zu berechnen, betrachten wir hier, wo die Querschnittsflächen erst ermittelt werden sollen, die Produkte $(\sigma . F)$ als die Unbekannten.

Zum Zeichnen der H-Linie dient die Formel für z auf Seite 125 Die Formel für m auf der folgenden Seite dient zum Auftragen der M-Linie. Um den Einfluss des Eigengewichtes zu berechnen, benutzen wir die Formeln für H und M auf Seite 127. Dann findet

sich $(\sigma F) = H.\cos\alpha \pm \frac{M}{k}$, worin k den Kernradius bezeichnet. Das Pluszeichen bezieht sich auf die obere, das Minuszeichen auf die untere Kante des Querschnittes.

Den Einfluss der zufälligen Last bestimmt man mittels Einflusslinien nach dem gewöhnlichen Verfahren. Die K-Spannungen findet man nach der Gleichung $(\sigma_k F) = \frac{Py}{k} \mp P.\cos\alpha$, worin P die Verkehrslast pro Pfosten bedeutet. Das Pluszeichen entspricht hier der untern, das Minuszeichen der obern Kante. Die gesuchten Kräfte der zufälligen Last sind dann $(\sigma F) = \frac{(\sigma_k F).\Sigma(z)}{m}$.

Die Temperaturkraft wird nach der Formel auf Seite 130 berechnet, dann sind die Temperaturspannungen $(\sigma_t F) = \frac{(\sigma_k F).T}{P}$. Das Scheitelträgheitsmoment, dessen Kenntnis zur Berechnung von T nötig ist, bestimmt man angenähert aus den für Eigengewicht und Verkehrslast gefundenen Spannungen.

Sind die Produkte (σF) alle gefunden, so addiert man sie, bestimmt deren Grenzwerte, leitet aus Maximum und Minimum die zulässige Spannung σ ab und findet endlich durch Division die gesuchten Flächeninhalte F. Man erhält dabei für jeden Querschnitt zwei Werte, den einen für die obere, den andern für die untere Kante; von diesen ist je der grössere massgebend.

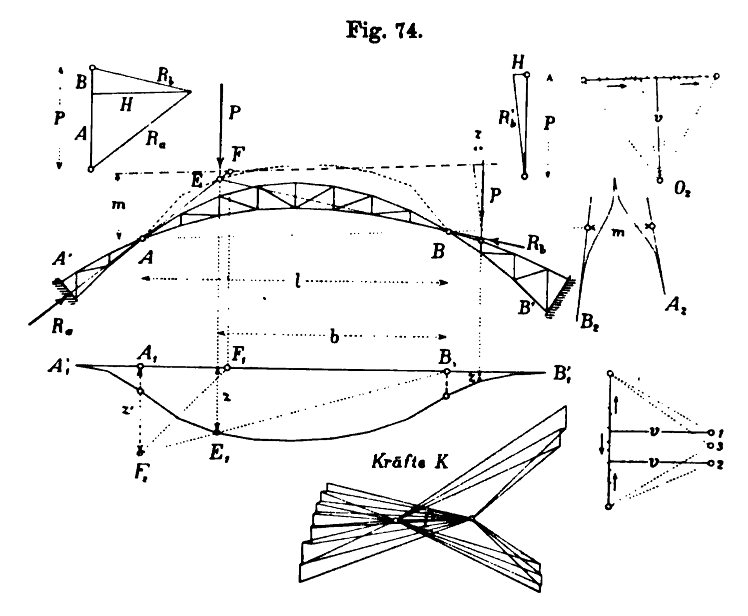
Dieser Rechnungsweg würde bereits endgültige Ergebnisse liefern, wenn die Werte i (Trägheitsradius) und k (Kernradius) bekannt wären.[1] Da das im allgemeinen nicht der Fall ist, so müssen wir diese beiden Grössen durch Schätzung bestimmen. Bei I-förmigen Querschnitten kann man angenähert $i = 0{,}43\,h$ und $k = 0{,}37\,h$ setzen (h = Höhe des Stehbleches). Genau lassen sich die Werte von i und k erst bestimmen, wenn die erste Berechnung des Bogens vollendet und die erforderlichen Querschnitte aufgezeichnet sind. Zeigt es sich hierbei, dass die schätzungsweise angenommenen Werte nicht mit den wirklichen übereinstimmen, so muss die Rechnung wiederholt werden.

Die Formeln der Nr. 32 setzen eine parabolische Bogenachse voraus; ist diese Bedingung nicht erfüllt, folgt die Bogenachse beispielsweise einem Kreise, so empfiehlt es sich, die Eigengewichtsspannungen nicht nach obigen Formeln, sondern mittels der eingezeichneten Drucklinie zu ermitteln.

34. Verschobene Gelenke.

In allen bisherigen Untersuchungen ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die beiden Gelenke des Bogens sich an den Widerlagern befinden. Die statische Berechnung bleibt in der Hauptsache dieselbe, wenn die Gelenke weiter oben angebracht sind (Fig. 74). Auch in diesem Falle ist der Bogen einfach statisch unbestimmt.

Fig. 74.



Soviel wir wissen, sind solche Bogen noch nicht gebaut worden, wenngleich man ihnen gewisse Vorzüge nicht absprechen kann. Vielleicht blüht ihnen in der Zukunft ein besseres Los.

Wir bezeichnen, wie früher, die Stablänge mit s, den Flächeninhalt des Querschnittes mit F, die Entfernung des Stabes vom Drehpunkte mit a und die Entfernung des Drehpunktes von der Gelenklinie oder Bogensehne mit y. Dann berechnen wir die Gewichte $\Delta w = \frac{s\,y}{E\,F\,a^2}$ und lassen sie in den Drehpunkten als Kräfte angreifen. Zwischen A und B sind die Δw positiv, ausserhalb $A\,B$ negativ, weil die Entfernungen y ausserhalb der Gelenke ihr Zeichen wechseln.

Da die Summe aller Δw unter Umständen sehr klein oder

gar null wird, so verwenden wir als Polweite für die Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ eine beliebige Grösse v. Um das erste Seileck $A_1 B_1$ zu bekommen, nimmt man den Pol des Kraftteckes in drei verschiedenen Lagen an (Fig. 74 rechts unten). Zuerst zeichnet man mit dem Pol 1 das Seileck von A_1' bis A_1; die erste Seite dieses Seileckes muss wagrecht verlaufen, da der Träger in A' eingespannt ist. Dann zeichnet man mit dem Pole 2 das Stück $B_1 B_1'$, dessen Endseite ebenfalls wagrecht sein muss. Hierauf wird das mittlere Stück des Seileckes gezeichnet, wobei der Pol 3 durch probieren so gelegt wird, dass das Seileck unter A_1 beginnt und unter B_1 endigt. Bei symmetrischer Anordnung des Bogens kommt 3 genau in die Mitte des Kraftteckes zu liegen.

Durch das zweite Seileck $A_2 B_2$ wird die Lage der M-Linie bestimmt. Hier muss man die Gewichte Δw parallel zu AB wirken lassen. Das Kraftteck zeichnet man am besten neu (Fig. 74 rechts oben). Der Abstand der M-Linie von AB ist dann gleich dem Abschnitt der äussersten Seilseiten auf der verlängerten Bogensehne. Denn nach der Theorie des Seilpolygons ist das Produkt $v.m$ (wie früher $w.m$) das statische Moment sämtlicher Gewichte, bezogen auf die Bogensehne.

Das Seileck $A_1 B_1$ ist nun wiederum die Biegungslinie des Bogens unter der Wirkung der Kraft H, also die Einflusslinie für den Bogenschub und zwar ist, wie früher,

$$H = \frac{Pz}{m}.$$

Dieser Ausdruck gilt auch für Lasten ausserhalb der Strecke AB.

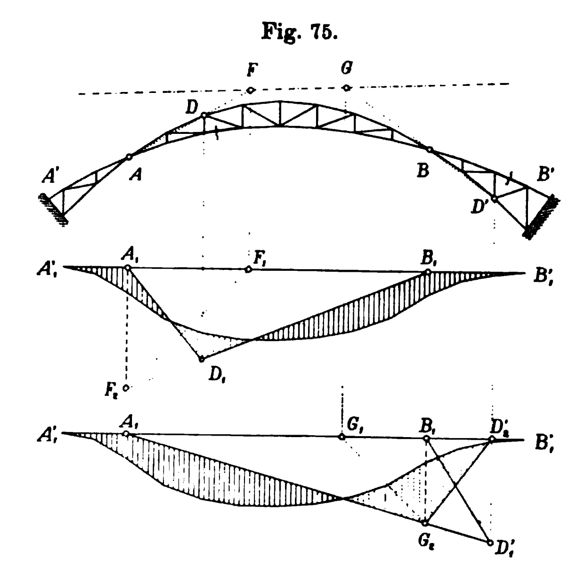
Zerlegt man P in zwei lotrechte, durch A und B gehende Teilkräfte, so ist die linke Kraft $A = \frac{Pb}{l}$. Folglich verhält sich $A:H = \frac{Pb}{l} : \frac{Pz}{m} = m : \frac{lz}{b} = m : z'$. Zieht man daher $B_1 E_1 F_2$, macht $A_1 F_1 = A_1 F_2$ und lotet F_1 hinauf nach F, so ist AF die Richtung des linksseitigen Auflagerdruckes; denn die Bedingung $A.z' = H.m$ wird hierdurch erfüllt.

Vertauscht man die linke Seite mit der rechten, so findet man auf demselben Wege den rechtsseitigen Auflagerdruck. Die Richtungen beider Auflagerdrücke müssen sich auf der Kraft P schneiden.

Wandert die Last P von A bis B über den ganzen Bogen, so beschreibt der Schnittpunkt E der beiden Auflagerdrücke die Kämpferdrucklinie; sie ist in der Figur gestricht eingezeichnet. Wie man sich leicht überzeugt, geht die Kämpferdrucklinie durch die beiden Gelenkpunkte.

Für Lasten, die ausserhalb der Gelenke stehen, muss das Verfahren etwas abgeändert werden. Da die Drucklinie unter allen Umständen durch die Gelenkpunkte gehen muss, so stellt für Lasten rechts von B der Horizontalschub den linksseitigen Auflagerdruck dar und umgekehrt; die Kräfte P, H und R'_b z. B. bilden daher ein geschlossenes Krafteck (Fig. 74 rechts oben). Die Kämpferdrucklinie fällt ausserhalb AB mit der Bogensehne AB zusammen. Gleich wie früher ist $H = \frac{Pz}{m}$; folglich verhält sich $H : P = z : m$; man findet daher die Richtung von R'_b, wenn man z und m zu einem rechtwinkligen Dreieck zusammenfügt und die Hypothenuse zieht, wie es in der Figur für eine rechts von B stehende Last geschehen ist.

Fig. 75.



Der Einfluss des Eigengewichtes auf die Stabkräfte wird, wie früher, mittels eines Cremona'schen Kräfteplanes bestimmt.

Zur Berechnung der Stabkräfte für die zufällige Last wendet man Einflussflächen an. In der Fig. 75 sind die Einflussflächen für einen Gurtstab zwischen den Gelenken und einen solchen ausserhalb

gezeichnet. Der Einfluss der lotrechten Kräfte wird durch ein Dreieck $A_1 D_1 B_1$, der Einfluss der wagrechten Kräfte durch das Seileck $A_1' B_1'$ dargestellt. Der Gang der Arbeit unterscheidet sich von dem früheren in keiner Weise. Der Drehpunkt des Stabes wird mit A verbunden, damit die M-Linie angeschnitten, F heruntergelotet, $F_1 F_2$ unter 45° gezogen und F_2 mit B_1 verbunden. Dies gilt sowohl für innere wie für äussere Stäbe. In letzterem Falle empfiehlt es sich, das Dreieck $A_1 D_1' B_1$ in das Dreieck $A_1 G_2 D_2'$ umzuwandeln, wodurch das Abgreifen der Ordinaten z zwischen B_1 und B_1' erleichtert wird. Die Einflussflächen sind der grösseren Deutlichkeit wegen für beide Fälle schraffiert.

Der Plan der Kräfte K ist in der Fig. 74 gezeichnet. Man lässt die Kraft P in A in der Richtung der Bogensehne angreifen und ermittelt die Stabkräfte nach Cremona.

Die Temperaturkraft geht wie gewöhnlich durch die beiden Gelenke, und ihre Grösse ist $T = \frac{\alpha t l}{v m}$, wobei man m als Länge, die Polweite v dagegen im Massstab der Δw zu messen hat.

Wurden die elastischen Gewichte mit $E = 1$ berechnet, so muss dem Ausdrucke für T noch der Buchstabe E hinzugefügt werden. Für l setzt man die Spannweite des ganzen Bogens ein, von Mitte zu Mitte der Auflager gemessen.

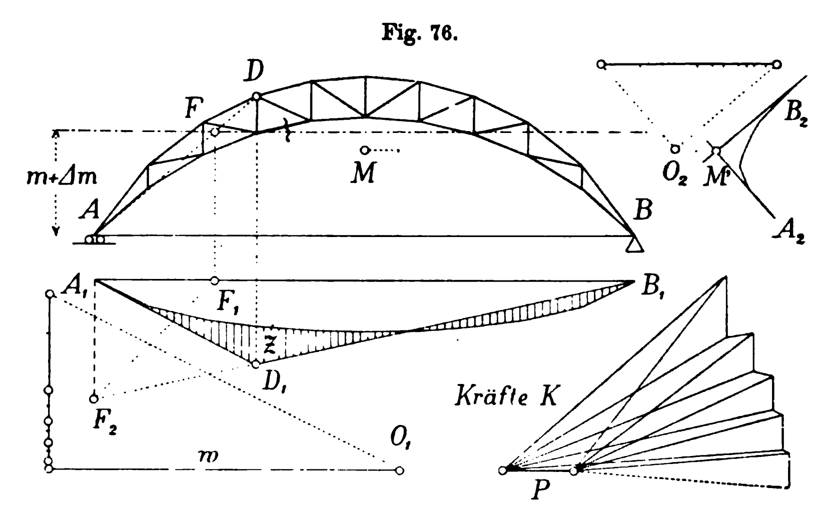
35. Bogen mit Zugband.

Sind die Bogenendpunkte A und B durch ein Zugband, das den Horizontalschub aufnimmt, miteinander verbunden, so werden die Auflager nur lotrecht belastet. Die Einflussfläche für die Kraft H kann in diesem Falle in derselben Weise gezeichnet werden, wie wenn das Zugband fehlt und der Schub von den Widerlagern aufgenommen wird, es ändert sich bloss die Lage der M-Linie.

Man berechnet wie gewöhnlich die Gewichte $\Delta w = \frac{s y}{E F a^2}$ und lässt sie als Kräfte in den Drehpunkten der Stäbe angreifen (Fig. 76), erst lotrecht (Seileck $A_1 B_1$), dann wagrecht (Seileck $A_2 B_2$). Die Polweite wählt man beim ersten Seileck (Pol O_1) gleich der Summe aller Δw, beim zweiten (Pol O_2) beliebig. Bei symmetrischer Anordnung wird das zweite Seileck bloss zur Hälfte gezeichnet. Hieraus findet man den Abstand m des Schwerpunktes aller Δw.

Hält man den Bogen in B fest und lässt die Kräfte P, A und H auf ihn einwirken, so verlängert sich die Bogensehne unter der Wirkung von P und A um die Strecke $P.w.z$ (vgl. Nr. 16). Unter der Wirkung von H verkürzt sie sich um die Strecke $H.w.m$. Der Unterschied beider Bewegungen muss gleich der Verlängerung des

Fig. 76.



Zugbandes, also gleich $\frac{Hl}{EF_z}$ sein, wenn die Querschnittsfläche des Zugbandes mit F_z bezeichnet wird. Hieraus folgt die Beziehung

$$P.w.z - H.w.m = \frac{Hl}{EF_z}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Delta m = \frac{l}{EF_z w},$$

so wird

$$H = \frac{Pz}{m + \Delta m}.$$

Zu dem nämlichen Ergebnisse gelangt man, wenn man die Theorie der virtuellen Arbeiten anwendet. Das Seileck $A_1 B_1$ ist die Durchbiegungslinie für den Horizontalschub und zwar ist die Durchbiegung gleich Hwz. Liegt während dieser Durchbiegung eine Last P auf dem Bogen, so verrichtet sie die Arbeit $P.Hwz$. Diese Arbeit ist gleich der Arbeit der Kraft H, während P zur Wirkung gelangt. Nennt man den Formänderungswinkel $\Delta\delta$, so ist die Arbeit von H gleich $\Sigma(Hy\Delta\delta)$, (vgl. Teil III, S. 253). oder, da $\Delta\delta = \frac{Ms}{EFa^2}$ und $M = Hy$, gleich $\Sigma(H^2 y \Delta w) = H^2 wm$. Hierzu

kommt noch die virtuelle Arbeit im Zugband gleich $\frac{H^2 l}{E F_z}$. Setzt man die Arbeiten der Kräfte P und H einander gleich, so bekommt man

$$P H w x = H^2 w m + \frac{H^2 l}{E F_z},$$

woraus sich für H derselbe Ausdruck wie oben ergibt.

Die Strecke m wird durch das zweite Seileck oder durch Rechnung mittels der Formel auf S. 64 gefunden. Den Zuschlag Δm berechnet man am besten zahlenmässig; er ist wie m selbst eine Länge. Hat man bei der Berechnung der Δw den Elastizitätsmodul $E = 1$ angenommen, so ist diese Grösse auch bei der Berechnung von Δm zu streichen. Wir haben also

$$\Delta m = \frac{l}{F_z w}.$$

Auch in diesem Falle ist der Zuschlag eine Länge. Hat man bei der Berechnung der Δw die Längen a, s und y in Metern, die F in cm^2 eingesetzt, so muss dasselbe auch bei Berechnung von Δm geschehen.

Von hier an schliesst sich die statische Berechnung des Bogens genau an die frühere an. Alles, was in den früheren Nummern gesagt worden, gilt auch vom Bogen mit Zugband. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die M-Linie etwas höher liegt als früher und dass in allen Formeln $m + \Delta m$ an Stelle von m gesetzt werden muss; auch bei der Berechnung der Stabkräfte ist jetzt zu setzen $S = \frac{K \,.\, \Sigma(z)}{m + \Delta m}$.

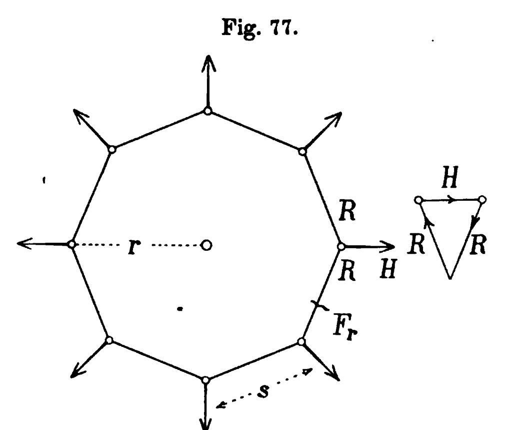
Die Temperaturkraft T kommt bei Bogen mit Zugband ganz in Wegfall, weil die Auflager eine Ausdehnung des Bogens durch die Wärme ohne Widerstand gestatten. Nur wenn sich einzelne Stäbe stärker als andere erwärmen, entstehen Wärmespannungen. Hierfür gilt (vgl. S. 86) der Ausdruck $T = \frac{\alpha t}{w(m + \Delta m)} \cdot \Sigma\left(\frac{s y}{a}\right)$.

Je stärker das Zugband gemacht wird, desto kleiner wird der Zuschlag Δm; für ein Zugband von unendlich grossem Querschnitt wird $\Delta m = 0$ und die Berechnung kehrt auf die alte zurück. Verringert sich dagegen der Wert F_z, so vergrössert sich Δm. Für $F_z = 0$ wird Δm unendlich gross; in diesem Falle rückt die M-Linie ins Unendliche, der Bogenschub wird null und der Bogen geht in einen Balkenträger über. —

Kuppeldachstühle werden zuweilen derart gebaut, dass sich eine Anzahl Bogenträger strahlenförmig durchkreuzen; die Fusspunkte der Bogenträger finden meistens ihren Halt in einem kreis- oder polygonalförmigen Fussringe. Hier tritt an Stelle des Zugbandes der Fussring (Fig. 77). Die Kraft in einem Ringstabe ist $R = \frac{H r}{s}$, die spezifische Spannung $\sigma = \frac{R}{F_r}$. Setzt man diesen Wert gleich $\frac{H}{F_s}$, so ergibt sich

$$\varDelta m = \frac{2 r^2}{E F_r w s}.$$

Fig. 77.



Diese Bemerkung reicht aus, so lange sämtliche Bogenträger symmetrisch und gleich belastet sind. (Eigengewicht und volle Schneelast.) Bei teilweiser und unsymmetrischer Belastung werden die Bogenschübe ungleich und die Berechnung des Fussringes muss nach der Theorie des elastischen Stabringes vorgenommen werden. (Vgl. Nr. 70.)

36. Bogen mit verschobenem Zugband.

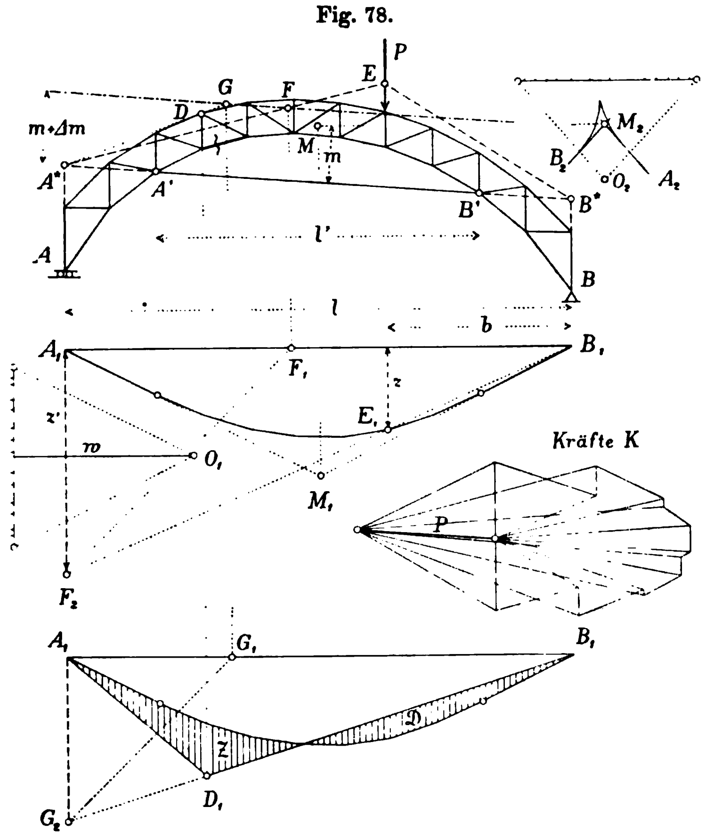
Das Zugband verbinde nicht die Auflagerpunkte, sondern zwei höher gelegene Knotenpunkte A' und B' des Bogens (Fig. 78). In diesem Falle arbeiten zunächst die Bogenteile ausserhalb $A' B'$ ganz wie Balkenfachwerke; das Zugband hat auf die Stäbe links von A' und rechts von B' keinen Einfluss; zu ihrer Berechnung sind die Regeln für gewöhnliche Fachwerke anzuwenden. (Vgl. Teil II.)

Um den Bogenteil $A' B'$ zu berechnen, verfährt man wie gewöhnlich. Man berechnet die elastischen Gewichte $\varDelta w = \frac{s y}{E F a^2}$, wobei y den Abstand des Drehpunktes vom Zugband bedeutet, und lässt dieselben erst lotrecht, dann wagrecht in den Drehpunkten als Kräfte wirken. Für das erste Seileck $A_1 B_1$ macht man die Polweite gleich der Summe aller Einzelgewichte; den Pol legt man so, dass die Schlusslinie wagrecht wird. Unter den Teilen $A A'$ und $B' B$ verläuft das Seileck einfach geradlinig. Um das zweite Seileck $A_2 B_2$ zu zeichnen, wählt man einen beliebigen Pol O_2; dieses Seileck

dient nur dazu, den Schwerpunkt M aller Gewichte und damit die Strecke m zu finden.

Das Seileck $A_1 B_1$ ist wiederum die Durchbiegungskurve für eine im Zugband wirkende Kraft H, also die Einflusslinie für den Bogenschub. Die virtuelle Arbeit einer Last P ist, während H zur

Fig. 78.



Wirkung gelangt, wie in der vorigen Nummer gleich $P.Hwz$; die Arbeit von H ist für die Stabkräfte gleich $H^2 wm$ und für das Zugband gleich $\frac{H^2 l'}{E F_z}$. Setzt man beide Arbeitswerte einander gleich, so wird

$$H = \frac{Pz}{m + \Delta m},$$

worin

$$\Delta m = \frac{l'}{E F_z w}.$$

Die Drucklinie für eine Einzellast wird durch die Linien $A^* E B^*$ dargestellt. Die lotrechte Seitenkraft von R ist $A = \frac{Pb}{l}$. Folglich verhält sich $A : H = m + \Delta m : z'$. Um die Richtung $A^* F$ des Auflagerdruckes für die Last P zu finden, zeichnet man somit im Abstand $m + \Delta m$ vom Zugband die M-Linie, zieht dann $B_1 E_1 F_2$, macht $A_1 F_1 = A_1 F_2$ und lotet F_1 hinauf nach F.

Die Einflussfläche für eine Stabkraft wird jetzt wie früher gezeichnet. Die Fig. 78 zeigt, wie die Einflussfläche für einen untern Gurtungsstab gezeichnet wird. Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens folgt, wie immer, aus der Betrachtung, dass eine Last über E_1 zu einem Auflagerdruck $A^* F$ führt, der, weil er durch den Drehpunkt des Stabes geht, die Stabkraft unberührt lässt.

Der Plan der Kräfte K ist ebenfalls aus Fig. 78 ersichtlich; selbstverständlich erstreckt er sich nur auf die Stäbe zwischen A' und B'.

37. Bogen mit zwei Zugbändern.

In der vorhergehenden Nummer ist vorausgesetzt worden, dass die Auflagerpunkte A und B sich wagrecht ungehindert verschieben können (Rollenschuh auf der einen Seite). Stemmen sich dagegen die Bogenfüsse gegen feste Widerlager, oder sind sie durch ein zweites Zugband miteinander verbunden, so muss die Rechnung abgeändert werden. Der Bogen ist jetzt zweifach statisch unbestimmt und seine Berechnung wird dadurch natürlich umständlicher.

Die Drucklinie für eine Einzellast nimmt in diesem Falle die Form $A A^* E B^* B$ an. Das entsprechende Krafteck ist in der Fig. 79 rechts gezeichnet. H ist die Kraft im untern, H' diejenige im obern Zugband; A und B sind die lotrechten Auflagerdrücke. Verschiebt sich die Last P, so bewegen sich die Punkte A^* und B^* auf der Richtungslinie des obern Zugbandes, E beschreibt die Kämpferdrucklinie und die Linien $E A^*$ und $E B^*$ berühren je eine Kurve, die „Umhüllungslinien". (Vgl. drittes Kapitel, Nr. 42.)

Um die Grösse von H und H' zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein.

Wir berechnen die Gewichte $\Delta w = \frac{s y}{E F a^2}$ für den ganzen Bogen, sowie die Gewichte $\Delta w' = \frac{s y'}{E F a^2}$ für den Bogenteil $A' B'$.

Hierauf bildet man zwei Kraftecke mit den Polen O und O' und zeichnet die zwei Seilecke $A_1 B_1$ und $A_1'' B_1''$. Ersteres hat die

Fig. 79.

gewöhnliche Form, letzteres läuft von A_1'' bis A_1' und von B_1' bis B_1'' geradlinig. Dann lässt man die Gewichte wagrecht wirken (Seilecke $A_2 B_2$ und $A_2' B_2'$) und bestimmt mittels der äussersten Seiten der vier Seilecke die Schwerpunkte M und M'.

Wir nehmen nun zuerst an, die Zugbänder fehlen und die Last P gelange allein zur Wirkung. Dann entfernen sich die Punkte A und B voneinander um die Strecke $\Delta l_1 = P.w.z.$ Das Seileck $A_1 B_1$ ist nämlich die Durchbiegungskurve für die Kraft H, und nach dem Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderungen verhält sich die lotrechte Verschiebung, welche H bewirkt, zur wagrechten Verschiebung, welche P bewirkt, wie $H:P$, folglich $H w z : \Delta l_1 = H : P$. Auf demselben Wege bekommen wir die Strecke, um welche sich die Punkte A' und B' voneinander entfernen, $\Delta l_1' = P.w'.z'$.

Nun gelange zweitens die Kraft H zur Wirkung. Dann ändert sich die Entfernung AB um die Grösse $\Delta l_2 = H.w.m$ und die Entfernung $A'B'$ um die Grösse $\Delta l_2' = H.w'.n$. Diese Grösse ist nämlich nach früher (Nr. 16) gleich der wirkenden Kraft mal dem statischen Momente der Gewichte $\Delta w'$, bezogen auf die Kraftrichtung, also $\Delta l_2' = H.\Sigma(\Delta w' y) = H.w'.n$.

Bringt man drittens die Kraft H' zur Wirkung, so ändert sich AB um $\Delta l_3 = H'.w'.n$ und $A'B'$ um $\Delta l_3' = H'.w'.m'$.

Die Längenänderungen Δl haben für P das positive, für H und H' das negative Zeichen. Die Summe aller Änderungen muss gleich $\frac{Hl}{EF_z}$ bezw. $\frac{H'l'}{EF_z'}$ sein. Folglich ist

$$P.w.z - H.w.m - H'.w'.n = \frac{Hl}{EF_z},$$

$$P.w'.z' - H.w'.n - H'.w'.m' = \frac{H'l'}{EF_z'}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Delta m = \frac{l}{EF_z w},$$

$$\Delta m' = \frac{l'}{EF_z' w'},$$

so wird

$$H = \frac{w(m' + \Delta m')z - w' n z'}{w(m + \Delta m)(m' + \Delta m') - w' n^2} \cdot P,$$

$$H' = \frac{w(m + \Delta m)z' - w n z}{w(m + \Delta m)(m' + \Delta m') - w' n^2} \cdot P.$$

Fehlt das obere Zugband, so ist $F_z' = 0$, also $\Delta m' = \infty$; dann wird $H' = 0$ und $H = \frac{Pz}{m + \Delta m}$; das ist der Fall der Nr. 35.

Fehlt das untere Zugband, so ist $\Delta m = \infty$, folglich $H = 0$ und $H' = \frac{P z'}{m' + \Delta m'}$. (Bogen mit verschobenem Zugband, Nr. 36.)

Fehlt das untere Zugband und stützen sich dafür die beiden Bogenfüsse auf feste Widerlager, so ist in obigen Ausdrücken $F_z = \infty$, also $\Delta m = 0$ zu setzen.

Fehlen beide Zugbänder und stützt sich der Bogen gegen Widerlager, so ist $F_z = \infty$ und $F_z' = 0$, also $\Delta m = 0$ und $\Delta m' = \infty$ zu setzen; dann wird $H = \frac{P z}{m}$ und $H' = 0$; der Fall geht in den gewöhnlichen Fall eines Bogens ohne Zugbänder über.

Was nun die Berechnung der Stabkräfte betrifft, so lässt sie sich, da der Träger zweifach statisch unbestimmt ist, nicht mehr mittels einer einzigen Einflusskurve durchführen. Es bleibt kaum etwas anderes übrig, als den Einfluss verschiedener Einzellasten zu bestimmen und aus den Ergebnissen die Einflusskurven Stück für Stück zusammenzusetzen, eine Arbeit, die wesentlich mehr Zeit erfordert als die Berechnung einfach statisch bestimmter Gebilde. Wenn die Zahl der Stäbe nicht zu gross ist, so wendet man zur Bestimmung der Stabkräfte für die einzelnen Lasten am besten das Cremona'sche Verfahren an. Ist die Stabzahl gross, so schlägt man Wege ein, wie sie in den beiden folgenden Kapiteln beschrieben sind.

In der Fig. 79 ist der Cremona-Plan für eine über 8 stehende Last von 5 t gezeichnet. Zunächst ergibt sich aus unserer Zeichnung für $F_z = 27$ cm² und $F_z' = 52$ cm², unter Weglassung des Elastizitätsmoduls, $w = 1{,}231$, $m = 8{,}78$, $\Delta m = 1{,}0$, $w' = 0{,}292$, $m' = 3{,}63$, $\Delta m' = 1{,}4$ und $n = 10{,}24$ m. Diese Werte bleiben für die ganze Rechnung konstant. Hieraus folgt nun gemäss obiger Formeln

$$H = (0{,}21\, z - 0{,}11\, z')\, P,$$

$$H' = (0{,}40\, z' - 0{,}42\, z)\, P.$$

Für eine Last über dem Knotenpunkte 8 liefert die Zeichnung die Werte $z = 4{,}16$ und $z' = 5{,}26$ m. Folglich findet sich in diesem Falle

$$H = 0{,}21 \,.\, 4{,}16 - 0{,}11 \,.\, 5{,}26) \,.\, 5 = 1{,}6 \text{ t}$$

und

$$H' = (0{,}40 \,.\, 5{,}26 - 0{,}42 \,.\, 4{,}16) \,.\, 5 = 1{,}85 \text{ t}.$$

Ferner ergibt sich auf bekannte Weise $A = 5 \,.\, 21 : 33 = 3{,}18$ t und

$B = 5.12:33 = 1{,}82$ t. An der Hand dieser Zahlenwerte lässt sich nun das Krafteck der Kräfte A, B, H, H' zeichnen, worauf der Cremona'sche Kräfteplan in üblicher Weise durchgeführt wird.

Diese Arbeit wird nun für sämtliche Pfosten wiederholt (bei symmetrischer Anordnung genügt die Hälfte), worauf die Einflusslinien für die verschiedenen Stabkräfte ohne Schwierigkeit aufgetragen werden können. Da ähnliche Arbeiten in den beiden folgenden Kapiteln beschrieben werden, so verzichten wir hier auf weitere Erklärungen des Rechnungsvorganges.

38. Elastische Formänderungen.

Das Williot'sche Verfahren.

Zur graphischen Bestimmung der elastischen Formänderungen eines belasteten Bogenträgers bietet sich zunächst das Williot'sche Verfahren an (Teil II, Nr. 25). Es besteht darin, dass für die vorgeschriebene Belastung sämtliche Stabkräfte und hieraus die elastischen Verlängerungen und Verkürzungen der Stäbe nach der Formel $\Delta s = \frac{S s}{E F}$ berechnet werden; hierauf werden von einem zweckmässig gewählten Nullpunkte aus die elastischen Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte zeichnerisch bestimmt (vgl. Nr. 10).

Dieses Verfahren besitzt den Vorteil der Unmittelbarkeit; auch liefert es die Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte sowohl in wagrechter, als in lotrechter Richtung. Dagegen muss es, wenn mehrere Belastungsfälle behandelt werden sollen, immer wieder von Anfang an durchgeführt werden und wird in diesem Falle sehr zeitraubend.

Verfahren mittels der elastischen Gewichte.

Ein zweites Verfahren zur Bestimmung sämtlicher Formänderungen eines belasteten Bogens geht vom Formänderungswinkel aus und besteht darin, dass die Durchbiegungskurven als Seilpolygone gezeichnet werden.

Nach der Nummer 15 ist dieser Winkel $\Delta \delta = \frac{R r s}{E F a^2} = \frac{M s}{E F a^2}$.

Man betrachtet für jeden Stab das Produkt $M s$ als eine im Dreh-

punkt angreifende Kraft und verwendet den Wert EFa^2 als Polweite. Das Moment M kann gleich $H.y$ gesetzt werden, worin H den Bogenschub der Drucklinie und y den lotrechten Abstand des Drehpunktes von der Drucklinie bezeichnet. Man gelangt daher zu demselben Ziele, wenn man y als Kraft und den Wert $\frac{EFa^2}{Hs}$ als Polweite betrachtet, und gewinnt dabei den Vorteil, nur mit Linien arbeiten zu müssen.

Lässt man die Kräfte y in lotrechter Richtung wirken, so bekommt man die gewöhnliche Durchbiegungskurve des Bogens, d. h. die lotrechten Verschiebungen der Knotenpunkte. Dreht man das Krafteck um einen rechten Winkel und lässt die Kräfte y in wagrechter Richtung wirken, so erhält man die wagrechten Verschiebungen der Knotenpunkte. Meistens fragt man aber nur nach ersteren.

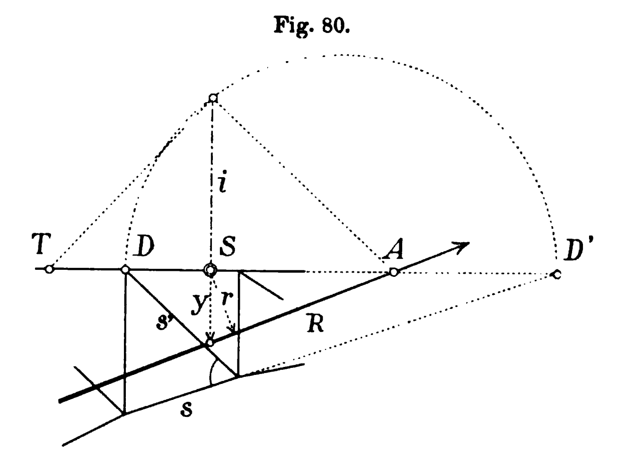
Dieses Verfahren liefert demnach die nämlichen Ergebnisse wie das Williot'sche und besitzt dabei den Vorteil, dass, wenn mehrere Belastungsfälle zu behandeln sind, die Werte $\frac{EFa^2}{s}$ nur einmal berechnet werden müssen. Dagegen klebt ihm darin ein empfindlicher Mangel an, dass die Drehpunkte der Streben meistens weit abseits oder gar im Unendlichen liegen und die unmittelbare Anwendung des Verfahrens infolgedessen erschwert oder gar unmöglich wird.

In der Praxis wird freilich der Einfluss, den die Streben auf die Formänderung ausüben, vielfach vernachlässigt; mit Unrecht, denn er kann sehr beträchtlich ausfallen. Wohl darf man sich bei der Berechnung der Stabkräfte die Vernachlässigung der Strebendeformationen erlauben, weil die Ergebnisse dadurch nur unwesentlich beeinflusst werden; handelt es sich jedoch um die Berechnung von Durchbiegungen, so sollten die Streben stets mit berücksichtigt werden. Zwar sind die Strebenkräfte bei Bogenträgern meistens verhältnismässig klein, und man ist geneigt, ihren Einfluss auf die Formänderungen deshalb als eine zu vernachlässigende Grösse anzusehen, übersieht aber dabei, dass, wie die Kräfte, so auch die Querschnittsflächen verhältnismässig klein sind.

Um den Einfluss der Strebendeformation zu berücksichtigen, schlägt man am besten den schon früher (Teil II, Nr. 30 u. Teil III, Nr. 5) beschriebenen Weg ein: Man vereinigt je eine Strebe mit einem Gurtungsstabe und bestimmt ihren gemeinschaftlichen Einfluss.

Nennt man $\varDelta g = \frac{s}{E F a^2}$ das elastische Gewicht eines Stabes, so ist der Formänderungswinkel $\varDelta \delta = M . \varDelta g$. Sollen zwei Stäbe vereinigt werden, beispielsweise die in der Fig. 80 durch einen kleinen Bogen verbundenen Stäbe s und s', so berechnet man für jeden Stab das elastische Gewicht und bringt das Gewicht des Stabes s in D, das des Stabes s' in D' an. Den Elastizitätsmodul setzt man gleich eins. Dann bestimmt man (am besten durch Rechnung) den Schwerpunkt S beider Gewichte und zeichnet über $D D'$ einen Halbkreis, der über S die Strecke i abschneidet. Ist nun R die den beiden Stäben entsprechende äussere Kraft, so ist der Formänderungs-

Fig. 80.



winkel $\varDelta \delta = M(\varDelta g + \varDelta g')$, worin $M = R . r = H . y$. Ferner bestimmt ein rechter Winkel über i von A aus den entsprechenden Drehpunkt T. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich ohne weiteres aus der Theorie der Elastizitätsellipse, lässt sich indessen auch unschwer direkt nachweisen.

Fällt der Drehpunkt der Strebe ins Unendliche, so wird $\varDelta g'$ gleich null und der Punkt S fällt mit D zusammen; ferner wird in diesem Falle $i = \sqrt{\frac{F s'^3}{F' s}}$. (Vgl. Teil III, S. 13.)

Soll nun die Biegungslinie eines Fachwerkbogens gezeichnet werden, so vereinigt man je einen Gurtstab mit einer benachbarten Strebe und ermittelt ihr gemeinschaftliches Gewicht, den Schwerpunkt und die Länge i. Dann trägt man die lotrechten Abstände y zwischen S und der Drucklinie als Kräfte auf, lässt sie in den Punkten T an-

greifen und zeichnet hierzu ein Seileck. Als Polweiten verwendet man die Längen $\frac{1}{H(\Delta g + \Delta g')}$. Dass die Weiten veränderlich sind, verursacht kaum Schwierigkeiten.

Lässt man die Kräfte lotrecht wirken, so bekommt man die lotrechten Durchbiegungen, lässt man sie wagrecht wirken, so findet man die wagrechten Durchbiegungen. —

Handelt es sich um die Berechnung der Formänderung eines vollwandigen Bogens, so ist das elastische Gewicht eines Elementes $\Delta g = \frac{\Delta s}{EJ}$ (vgl. Nr. 15), und die Drehpunkte liegen in den Antipolen der Drucklinie hinsichtlich der Elastizitätsellipsen der Elemente. Im übrigen ist der Vorgang der nämliche.

Man teilt den Bogen derart in Elemente, dass das Trägheitsmoment des Querschnittes auf die Länge eines Elementes als konstant angesehen werden darf. Als Teillinien wählt man am besten die Lastangriffspunkte. Ferner zeichnet man in jedes Element die Elastizitätsellipse ein (Fig. 81). Soll nun für eine gegebene Belastung die Durchbiegungskurve konstruiert werden, so zeichnet man vorerst auf Grund der früheren Entwicklungen die Drucklinie. Dann misst man die lotrechten Abstände der Drucklinie von den Elementenschwerpunkten, d. h. die y, und trägt sie als lotrechte Kräfte in einem Kräftepolygon auf. Die Polweiten macht man gleich

$$\frac{1}{H \cdot \Delta g} = \frac{EJ}{H \cdot \Delta s}.$$

Hierauf bestimmt man die Antipole der Drucklinie hinsichtlich der Elastizitätsellipsen. (Vgl. Nr. 22, S. 89). Lässt man jetzt die y in den Antipolen als lotrechte Kräfte wirken, so bekommt man die lotrechten Durchbiegungen, dreht man die Richtung der Kräfte um einen rechten Winkel, so findet man die wagrechten Durchbiegungen.

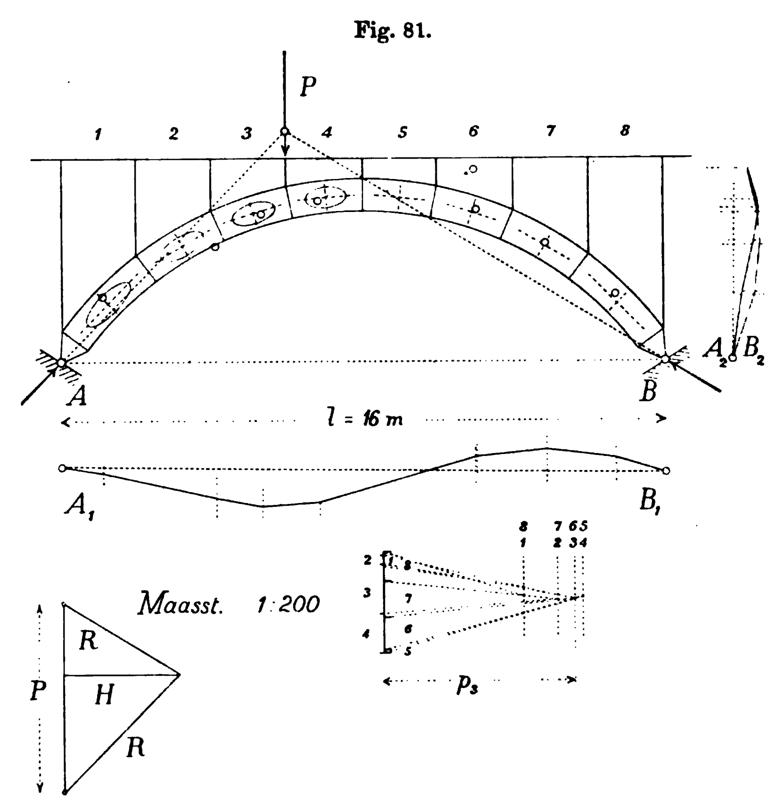
Sollten bei einzelnen Elementen die Antipole zu weit abseits fallen, so teilt man das Gewicht Δg in zwei Hälften, lässt diese in den Endpunkten des zur Drucklinie konjugierten Durchmessers angreifen und verfährt wie früher.

Das eben beschriebene Verfahren wird durch die Fig. 81, in welcher die Durchbiegung eines vollwandigen Bogens unter einer Einzellast bestimmt ist, näher erläutert.

Der Bogen wurde in acht Elemente eingeteilt. Die Längen derselben und das (durchschnittliche) Trägheitsmoment sind in der

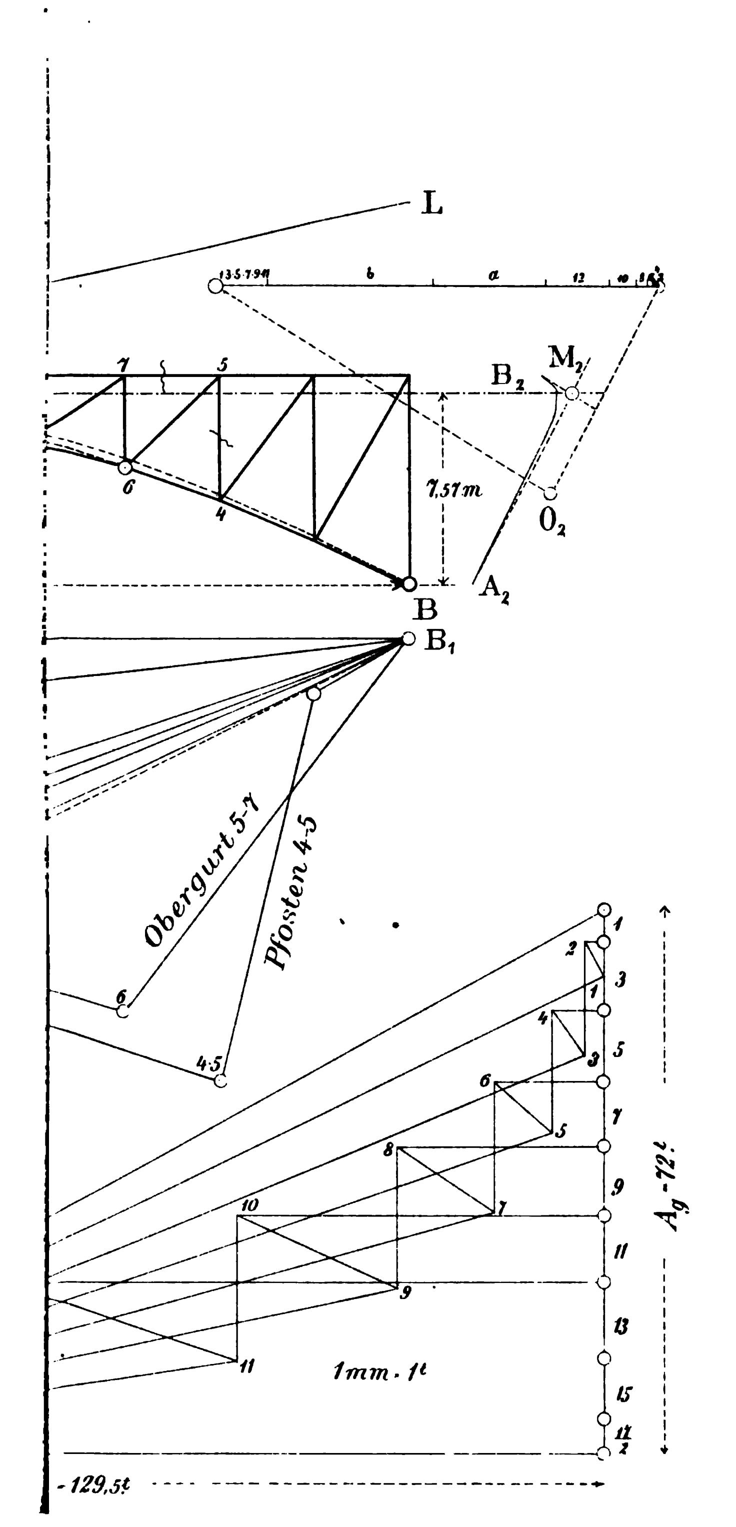
unten folgenden Tabelle eingeschrieben. Nach Anleitung der Nr. 17 wurde nun die Drucklinie für die Last $P = 10$ t gezeichnet. Der Bogenschub ergab sich hierbei $H = 6{,}1\,t$. Der Massstab der Figur ist 1 : 200. Die lotrechten Abstände der Drucklinie von den Mittel-

Fig. 81.



punkten der Elemente wurden nun in der Zeichnung abgegriffen und unter Berücksichtigung ihres Zeichens als Kräfte aufgetragen. Die Polweiten sollten (nach oben) gleich $\frac{EJ}{H \cdot \Delta s}$ gemacht werden; wir machten sie 1000 mal kleiner, um die Durchbiegungen in fünffacher natürlicher Grösse zu erhalten. Die so berechneten Polweiten sind in der Tabelle eingeschrieben; der Elastizitätsmodul wurde gleich 2000 t : cm² angenommen.

Nun wurden in die Elemente die Elastizitätsellipsen eingezeichnet und die Antipole der Drucklinie bestimmt; sie sind durch Ringe angegeben.


L
b
a
12
10
M$_2$
B$_2$
7
5
6
4
7,51 m
O$_2$
A$_2$
B
B$_1$
Obergurt 5-7
Pfosten 4-5
6
4·5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
13
15
17
A_g -72t
1mm. 1t
-129,5t



Hierauf wurden das Seileck $A_1 B_1$ und dessen Schlusslinie gezeichnet; es stellt die lotrechten Durchbiegungen des Bogens dar. Sodann wurde das Seileck $A_2 B_2$ konstruiert, dessen Seiten senkrecht auf den Strahlen des Kraftecks stehen. Hat man richtig gearbeitet, so kehrt dieses Seileck genau zum Anfangspunkt zurück. Durch den Doppelpunkt $A_2 B_2$ wurde endlich eine Senkrechte zu $A_1 B_1$ gezogen; sie schliesst mit dem Seileck die wagrechten Verschiebungen der Bogenachse ein.

Nummer des Elementes	1	2	3	4	
Länge „ „ $\Delta s =$.	271	220	200	193	cm
Trägheitsmoment $J =$		312 000			cm^4
Polweite $p = \frac{EJ}{1000\,H \cdot \Delta s} =$ . .	377	465	513	530	cm

39. Berechnung eines Bogens mit zwei Gelenken und geradem Obergurt.

(Obere Rheinbrücke Basel.)

(Tafel 1.)

Zur Erläuterung des Gesagten haben wir auf Tafel 1 die in den vorigen Nummern beschriebenen Konstruktionen auf ein Beispiel angewandt. Wir wählten dazu die obere Rheinbrücke in Basel. Es ist dies eine Strassenbrücke, die eine Spannweite von 60 m und einen Pfeil von 7,5 m besitzt. Die Träger haben einen Abstand von 2,40 m, sie sind fachwerkförmig bis auf die vier mittleren Felder, wo der Bogen in einen vollwandigen übergeht.

a) Elastische Gewichte.

Da wir in unserem Beispiel eine bereits bestehende Brücke behandeln, sind alle Querschnittsmasse bekannt, und die elastischen Gewichte für die Fachwerkstäbe lassen sich ohne weiteres nach der Formel $\Delta w = \frac{s\,y}{F a^2}$ berechnen. Den Elastizitätsmodul E setzen wir gleich eins. Man schreibt am besten die s, y, F und a tabellarisch auf, berechnet mit dem Rechenschieber das Produkt $F \cdot a^2$ und dann die Δw. (Vgl. Tabelle auf S. 159.) Da der Bogen symmetrisch ist, kann man die Rechnung auf die Hälfte beschränken.

Die elastischen Gewichte der vollwandigen Teile ergeben sich aus der Formel $\Delta w = \frac{s y}{J}$, wo s die Länge des Elementes, also die Feldweite, und y den Abstand des Schwerpunktes von der Bogensehne bedeutet. Das Trägheitsmoment J wird zunächst für die Querschnitte 13, 15 und 17 berechnet und zwar nach der Formel $J = F i^2$, in welcher F den ganzen Querschnitt bedeutet. Um i zu erhalten, bestimmt man in den Querschnitten die Abstände des Schwerpunktes und Kernpunktes von der untern Kante. Zur Kontrolle ist diese Arbeit auch für die obere Kante durchgeführt worden. Bezeichnet man diese Abstände mit s und z, so ist (vgl. Teil I, S. 56) $i^2 = s(z - s)$. Für den Querschnitt im Scheitel z. B. ergibt sich $i = 44{,}1$ cm.

Die so erhaltenen J haben wir über den entsprechenden Schnitten von einer Horizontalen aus lotrecht aufgetragen und durch eine Kurve verbunden. Nun kann das Trägheitsmoment für einen beliebigen Querschnitt einfach lotrecht darüber abgegriffen werden. Auch die k, i und s haben wir in gleicher Weise aufgetragen. Zur Berechnung der elastischen Gewichte greifen wir nun die Trägheitsmomente über den Schwerpunkten der Elemente ab und setzen sie in obige Formel ein.

b) H-Fläche und M-Linie.

Nun werden die elastischen Gewichte vertikal aufgetragen und mittels der Polweite $w = \Sigma(\Delta w)$ das erste Seileck gezeichnet, das mit der Schlusslinie $A_1 B_1$ die Einflussfläche für den Horizontalschub einschliesst. Oft ist es ratsam, um grössere Genauigkeit zu erzielen, die Ordinaten dieser Fläche rechnerisch zu ermitteln.

Ferner trägt man die elastischen Gewichte horizontal auf und zeichnet mittels einer beliebigen Polweite das zweite Seileck, bestimmt den Schnitt der äussersten Seiten und zieht dadurch die M-Linie. Im fachwerkförmigen Teil greifen die elastischen Gewichte in den Drehpunkten der betreffenden Stäbe an, im vollwandigen Teil in den Antipolen der Bogensehne bezüglich der Elastizitätsellipsen der Elemente. Auf diese Weise erhalten wir den Punkt M. Da der Bogen symmetrisch ist, liegt er in der Mitte der Spannweite. Sein Abstand von der Bogensehne beträgt 7,57 m.

Diese Zahl sollte man stets auch rechnerisch ermitteln, und zwar geschieht dies am besten nach der Schwerpunkts-Formel

$$m = \frac{\Sigma(\Delta w \,.\, y)}{\Sigma(\Delta w)}$$

(vgl. Nr. 16). Im fachwerkförmigen Teil ist y der Abstand des Drehpunktes von der Bogensehne, im vollwandigen Teil der Abstand des Antipoles. Die Produkte $\Delta w \,.\, y$ trägt man am besten neben die Δw in die Tabelle ein, bildet die beiden Summen und dividiert.

c) Berechnung des fachwerkförmigen Teiles.

Um zunächst die Stabkräfte zu bestimmen, welche das Eigengewicht hervorruft, berechnet man, wie in Nr. 18, das auf jeden Pfosten fallende Gewicht $g f$. In unserem Beispiel ist die Eigenlast auf die Längeneinheit $g = 2{,}4$ t, wobei 1 t vom Eisen und 1,4 t von der Beschotterung herrühren. Nun findet man den Horizontalschub, indem man unter den Pfosten (sowohl im fachwerkförmigen, wie im vollwandigen Teil) die Ordinaten z der Einflussfläche $A_1 B_1$ mit dem Zirkel addiert und die Summe in die Formel

$$H_g = \frac{g f \,.\, \Sigma(z)}{m}$$

einsetzt. Dabei ergibt sich $H_g = 129{,}5$ t.

Nun wird mit H_g und den Knotenlasten ein Krafteck und dazu die Drucklinie AB für Eigengewicht eingezeichnet. Ein Cremona-Plan, welcher der Symmetrie wegen auf die Hälfte beschränkt werden kann, gibt die Stabkräfte für Eigengewicht.

Die zufällige Last wird hier, da es sich um eine Strassenbrücke handelt, als gleichförmig verteilt angenommen und zwar zu 450 kg : m². Bei 2,40 m Bogenabstand und einer Feldweite von 3,75 m erhält man die auf einen Pfosten fallende Last zu $P = 4{,}05$ t. Mit dieser Kraft wird nun zunächst der Plan der K-Kräfte gezeichnet (vgl. Nr. 19). Der grösseren Genauigkeit wegen haben wir die Obergurtkräfte rechnerisch ermittelt, nach dem Momentenverfahren, und in die Zeichnung eingetragen. Auch in dem Cremona-Plan für Eigengewicht haben wir die Kraft im Stab 10—12 nach dem Momentenverfahren bestimmt, um eine Kontrolle für die Richtigkeit des Planes zu haben.

Was nun die Berechnung der Stabkräfte anbetrifft, so wird nach den in Nr. 19 abgeleiteten Regeln vorgegangen. In unserem

Beispiel haben wir die Einflussflächen für je einen Stab des Ober- und des Untergurtes, für eine Strebe und einen Pfosten bestimmt. Was die Konstruktion anbetrifft, so vergleiche man die Textfign. 40 bis 42. (S. 72 und 74.) Die Stabkräfte erhält man nach der Formel

$$S = \frac{K \cdot \Sigma(z)}{m}.$$

K wird aus dem Cremona-Plan entnommen; die z bedeuten die Ordinaten unter den Pfosten und werden mit dem Zirkel addiert. Natürlich hat man jeweilen zwischen Maximum und Minimum zu unterscheiden, die durch den Nullpunkt der Einflussfläche getrennt werden. Ferner hat man stets gut auf das Vorzeichen zu achten; doch lässt sich dasselbe nach Nr. 19 leicht daraus bestimmen, dass von den zwei Grenzwerten der grössere stets dasselbe Vorzeichen wie die Eigengewichtskraft haben muss.

Wie aus der Tafel zu ersehen ist, lassen sich leicht die Einflussflächen für mehrere Stäbe in eine Figur vereinigen; die H-Kurve ist ja für alle Stäbe gleich und braucht so nicht für jeden besonders gezeichnet zu werden. Wenn man nach allen Stabkräften fragt, was in der Regel der Fall ist, so wird man natürlich die Einflussflächen der gleichartigen Stäbe zusammenfassen, d. h. eine Figur für die Stäbe des Obergurtes zeichnen, eine für diejenigen des Untergurtes u. s. w.

Die Kräfte, welche die Wärmeschwankungen in den Stäben des Bogens hervorrufen, werden nach Nr. 21 dadurch bestimmt, dass man die Kraft

$$T = \frac{E \alpha t l}{w m}$$

im Punkt A wagrecht wirken lässt. Da wir bei der Berechnung der elastischen Gewichte $E = 1$ gesetzt haben, müssen wir den Elastizitätsmodul hier wieder einführen. Für unser Beispiel ergibt sich eine Temperaturkraft

$$T = \frac{2000 \cdot 0{,}000012 \cdot 25 \cdot 60}{1{,}172 \cdot 7{,}57} = 4{,}07 \text{ t}.$$

Zur Bestimmung der Stabkräfte benutzen wir den Cremona-Plan der K-Kräfte, indem wir diese Kräfte mit $\frac{T}{P}$ multiplizieren d. h. im Massstab 1 cm = 2,01 t abgreifen.

Die Stabkräfte, welche durch das Eigengewicht, die zufällige Last und die Temperaturschwankungen hervorgerufen werden, muss man schliesslich noch zusammenfassen und die maximale und

minimale Stabkraft bestimmen. Durch Division mit der Querschnittsfläche ergeben sich ohne weiteres die in den Stäben herrschenden Spannungen. In nachfolgender Tabelle haben wir dies für die vier Stäbe durchgeführt.

Stab-Nr.	S_g	K	$\Sigma(z)$ Max.	$\Sigma(z)$ Min.	S_p Max.	S_p Min.	S_t	S_{tot} Max.	S_{tot} Min.	F	σ
	t	t	cm	cm	t	t	t	t	t	cm²	t:cm²
$U_{4\text{-}6}$	−129,3	−7,30	+21,20	−1,27	−61,30	+ 3,68	±7,32	−197,9	−118,8	319,6	−0,62
$O_{5\text{-}7}$	− 14,1	+5,30	−10,08	+6,54	−21,25	+13,80	±5,31	− 40,7	+ 5,0	146,8	−0,28
$S_{5\text{-}6}$	+ 10,0	−3,38	− 8,99	+4,92	+12,05	− 6,60	±3,39	+ 25,4	+ 0,01	56,0	+0,45
$P_{4\text{-}5}$	− 16,1	+2,40	−13,45	+4,95	−12,80	+ 4,70	±2,41	− 32,5	+ 7,8	56,0	−0,58

d) Berechnung des vollwandigen Teiles.

Hier werden die Spannungen in den äussersten Kanten des Bogens berechnet, und zwar geht man ganz wie beim fachwerkförmigen Teile vor. (Vgl. Nr. 22.)

Den Einfluss des Eigengewichtes findet man aus der Kernformel

$$\sigma = \frac{R\,r}{F\,k} = \frac{H_g\,p}{F\,k}.$$

(Siehe S. 90.) Die Elemente dieser Formel werden aus der Zeichnung abgegriffen, zur Kontrolle ist es aber zu empfehlen, dieselben auch rechnerisch zu ermitteln.

Den Einfluss der zufälligen Last haben wir mittels Einflusslinien bestimmt. Diese werden genau wie beim fachwerkförmigen Teile gezeichnet, nur treten an Stelle der Drehpunkte hier die Kernpunkte und zwar für die obere Kante der untere Kernpunkt und umgekehrt. Nun werden die Spannungen σ_k bestimmt für die im Punkte A horizontal wirkende äussere Kraft $P = 4{,}05$ t, indem man diese mit den Abständen von den Kernpunkten multipliziert und durch den Kernhalbmesser k und den Querschnitt F dividiert:

$$\sigma_k = \frac{P\,p}{F\,k}.$$

Dann werden in den Einflussflächen die grössten und kleinsten Ordinatensummen ermittelt und aus der Formel

$$\sigma = \frac{\sigma_k \,.\, \Sigma(z)}{m}$$

schliesslich die maximalen und minimalen Spannungen für Ober- und Unterkante bestimmt.

Der Einfluss der Temperaturschwankungen ergibt sich genau wie beim fachwerkförmigen Teil, nur dass an Stelle der Kräfte wieder die Spannungen treten. Es ist

$$\sigma_t = \frac{T . \sigma_k}{P} .$$

Diese drei Spannungen werden schliesslich zusammengezählt und Maximum und Minimum bestimmt. In nachfolgender Tabelle ist dies für das Element a durchgeführt.

Stab-Nr.	σ_g	σ_k	$\Sigma(z)$ max.	$\Sigma(z)$ min.	σ_p max.	σ_p min.	σ_t	σ_{tot} max.	σ_{tot} min.
	t : cm²	t : cm²	cm	cm	t : cm²	t : cm²	t : cm²	t : cm²	t : cm²
a_u	− 0,045	− 0,152	+ 2,88	− 2,68	− 0,176	+ 0,164	± 0,153	− 0,374	+ 0,272
a_o	− 0,287	+ 0,099	− 4,75	+ 1,70	− 0,187	+ 0,067	± 0,100	− 0,574	− 0,120

Bei der Berechnung des vorliegenden Bogens haben wir nur die elastischen Gewichte der Gurtstäbe berücksichtigt und diejenigen der Streben vernachlässigt. Ein Vergleich zeigt, dass diese Vereinfachung gestattet ist, da sich dadurch sowohl die Grösse m wie auch die Ordinaten der H-Fläche nur wenig ändern, und daher auch die Stabkräfte nicht stark beeinflusst werden. In nachfolgendem haben wir diesen Vergleich rechnerisch durchgeführt.

Zuerst werden die elastischen Gewichte der Gurtungen allein berechnet und daraus m bestimmt. Hernach fügt man diejenigen der Streben und Pfosten hinzu, wodurch man m' erhält (vgl. nebenstehende Tabelle). Nun werden die Ordinaten z der H-Fläche bestimmt (Tabelle auf Seite 160), und zwar geht man dabei folgendermassen vor. Man vereinigt zunächst die elastischen Gewichte der Füllungsglieder mit denjenigen der anstossenden Gurtungsstäbe. Dabei fasst man am besten die Streben mit den Stäben des Obergurtes zusammen und die Pfosten mit denjenigen des Untergurtes (Teil II, S. 121), bestimmt jeweilen den Schwerpunkt dieser beiden Gewichte und lässt ihre Summe daselbst angreifen. Die Abstände dieser Punkte von den Auflagern bezeichnen wir mit a und b und die Auflagerdrücke der vereinigten Gewichte mit A und B. Nennt man nun noch die Abstände der Pfosten von den Auflagern mit x und x', so lassen sich ohne weitere Schwierigkeiten die Momen e für diese Stellen berechnen. Durch Division mit $\Sigma(\Delta w)$ erhält man die Ordinaten z. In der Tabelle auf Seite 160 entsprechen

die grossen Zahlen der Rechnung ohne Rücksicht auf Streben und Pfosten, während die kleinen sich auf die Rechnung mit Einzug der Füllungsglieder beziehen.

Elastische Gewichte

der Gurtungen ohne Streben und Pfosten.

Nr.	s	y	F	a	Fa^2	Δw	$\Delta w \cdot y$
	m	m	cm²	m	dm⁴	1/dm²	1/dm
1	4,203	8,260	343,8	7,351	18600	0,187	15,43
2	3,750	1,845	146,8	6,415	6040	0,115	2,12
3	4,058	8,260	330,6	5,930	11610	0,287	23,90
4	3,750	3,397	146,8	4,863	3470	0,367	12,50
5	3,964	8,260	319,6	4,590	6710	0,486	40,30
6	3,750	4,680	146,8	3,580	1882	0,930	43,51
7	3,881	8,260	310,0	3,459	3715	0,861	70,50
8	3,750	5,710	216,8	2,550	1415	1,520	86,50
9	3,833	8,260	302,0	2,499	1860	1,710	140,30
10	3,750	6,500	216,8	1,760	670	3,640	237,00
11	3,791	8,260	296,8	1,741	900	3,480	287,00
12	3,750	7,057	216,8	1,203	314	8,450	595,00
a	3,750	$y_s = 7{,}760$	—	—	$J = 197$	14,780	1150,00
b	3,750	$y_s = 7{,}870$	—	—	$J = 135$	21,800	1730,00
						58,613	4434,06

$$m = \frac{4434{,}06}{58{,}613} = 75{,}65 \text{ dm}$$

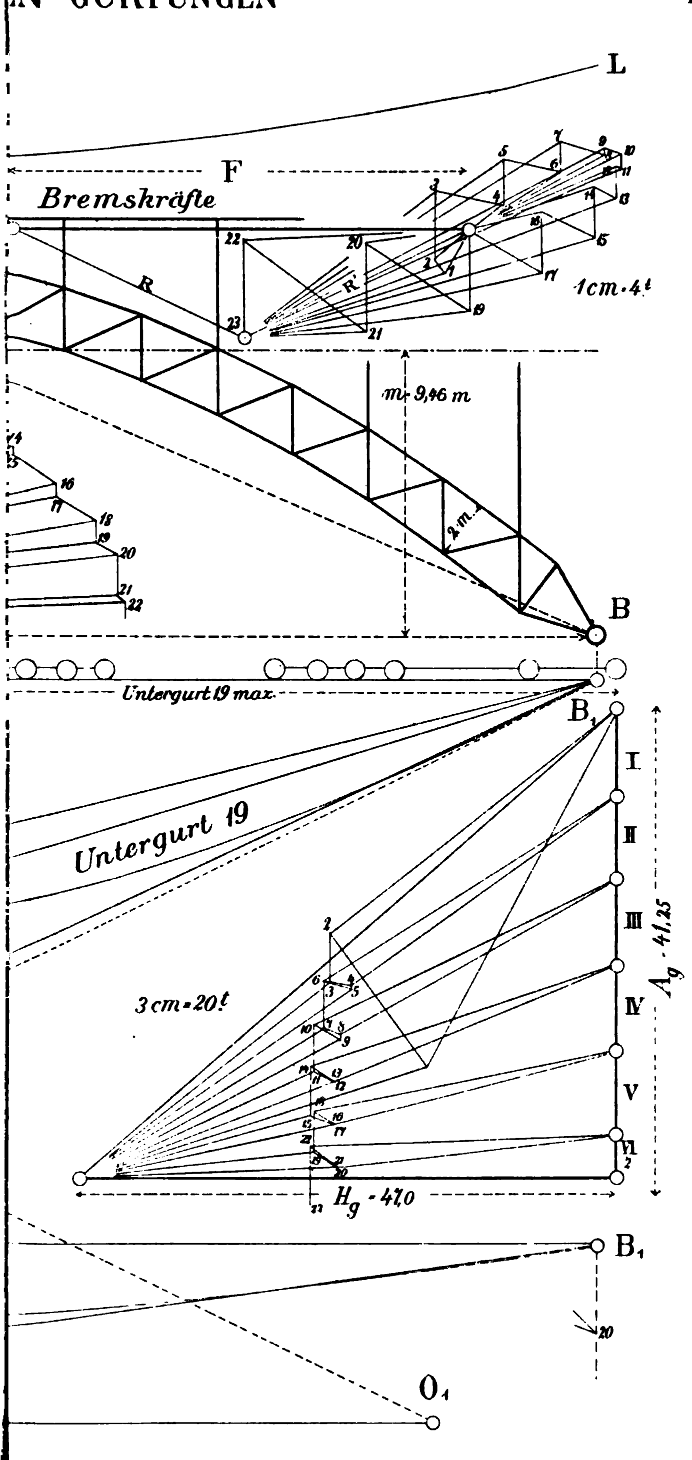
der Streben und Pfosten.

	Nr.	s	y	F	a	Fa^2	Δw	$\Delta w \cdot y$
Streben	1 2	7,430	8,260	45	14,40	9330	0,659	55,2
	3 4	6,140	8,260	45	12,33	6840	0,742	61,3
	5 6	5,180	8,260	56	9,78	5352	0,799	66,0
	7 8	4,530	8,260	56	7,20	2902	1,289	106,4
	9 10	4,140	8,260	80	5,15	2102	1,614	133,3
	11 12	3,940	8,260	80	3,75	1125	2,890	238,5
Pfosten	A 1	8,260	8,260	56	16,78	15770	0,434	35,8
	2 3	6,415	8,260	56	15,48	13430	0,394	32,5
	4 5	4.863	8,260	56	14,20	11300	0,356	29,4
	6 7	3,580	8,260	56	13,05	9540	0,310	25,6
	8 9	2,550	8,260	56	12,08	8180	0,258	21,3
	10 11	1,760	8,260	56	11,88	7910	0,184	15,2
							9,929	825,5
						Totale Summe:	**68,542**	**5259,56**

$m' =$ **76,66 dm.**

Einflussfläche des Horizontalschubes.

Nr.	P	a	b	lA	lB	$l\Sigma(A)$	$l\Sigma(B)$	x	x'	$lx\Sigma(A)$	$lx'\Sigma(B)$	lM	M	z
1	0,187	0	60,00	11,22	0	3515,8	0	0	60,00	0	0	0	0	0
A 1	0,621	11,68	48,82	30,00	7,30	4108,1	7,30			0	437	437	73	0,58
2	0,115	3,75	56,25	6,47	0,43	3504,6	0,43	0	56,25	0	24	13144	219	1,87
1 2	0,774	14,84	45,16	35,00	11,50	4078,1	18,80			0	1056	16206		
3	0,287	3,75	56,25	16,15	1,08	3498,1	1,51	3,75	56,25	13120	84	13144		
2 3	0,681	12,70	47,30	32,20	8,70	4043,1	27,50			15150	1548	16598	276	2,01
4	0,367	7,50	52,50	19,27	2,75	3482,0	4,26	3,75	52,50	13060	224	26194	436	3,72
3 4	1,107	15,37	44,63	48,50	17,00	4010,9	44,50			15050	2335	32035		
5	0,486	7,50	52,50	25,52	3,65	3462,7	7,91	7,50	52,50	25970	415	26190		
4 5	0,836	13,55	46,45	38,80	11,30	3962,4	55,80			29700	2932	32372	539	3,93
6	0,930	11,25	48,75	45,30	10,48	3437,2	18,39	7,50	48,75	25775	895	39045	651	5,55
5 6	1,729	16,09	43,91	76,00	27,80	3923,6	83,60			29440	4080	47380		
7	0,861	11,25	48,75	42,00	9,69	3391,9	28,08	11,25	48,75	38150	1369	39049		
6 7	1,171	14,70	45,30	53,00	17,20	3847,6	100,80			43300	4910	47560	792	5,77
8	1,520	15,00	45,00	68,30	22,80	3349,9	50,88	11,25	45,00	37680	2290	51490	857	7,31
7 8	2,809	19,27	40,73	114,20	54,10	3794,6	154,90			42650	6965	62115		
9	1,710	15,00	45,00	76,90	25,62	3281,6	76,50	15,00	45,00	49200	3440	51490		
8 9	1,968	16,58	43,42	85,40	32,60	3680,4	187,50			55150	8450	62350	1039	7,57
10	3,640	18,75	41,25	150,20	68,30	3204,7	144,80	15,00	41,25	48050	5965	63165	1052	8,98
9 10	5,254	21,31	38,69	203,50	112,00	3595,0	299,50			53900	12350	75900		
11	3,480	18,75	41,25	143,80	65,30	3054,5	210,10	18,75	41,25	57200	8670	63170		
10 11	3,664	19,35	40,65	148,50	70,50	3391,5	370,00			63550	15280	76080	1269	9,25
12	8,450	22,50	37,50	317,00	190,10	2910,7	400,20	18,75	37,50	54500	15010	73310	1221	10,42
11 12	11,340	24,65	35,35	400,00	279,50	3243,0	649,50			60800	24350	88315	1471	10,73
a	14,780	24,375	35,625	526,00	359,50	2593,7	759,70	22,50	33,75	58300	25610	79860	1330	11,34
	14,780	24,375	35,625	526,00	359,50	2843,0	1009,50			63965	34054	94875	1580	11,52
b	21,800	28,125	31,875	695,00	613,00	2067,7	1372,70	26,25	30,00	54250	41181	82362	1372	11,71
	21,800	28,125	31,875	695,00	613,00	2317,0	1622,00			60821	48660	97320	1621	11,83
	58,613 . 2 = 117,226			2143,13	1372,70					41181				110,09
	68,534 137,068			2486,10	1622,00					48660				114,45


L
F
Bremskräfte
R
R'
1cm = 4t
m = 9,46 m
2 m.
B
Untergurt 19 max.
B₁
Untergurt 19
I
II
III
IV
V
VI
Ag = 41,25
3 cm = 20t
Hg = 47,0
B₁
O₁

In einer dritten Tabelle haben wir schliesslich noch die Ordinaten zusammengestellt und die Summen der Quotienten $z:m$ gebildet. Die Zahlen in der zweiten und vierten Kolonne erhält man aus der Rechnung ohne Berücksichtigung der Füllungsglieder, diejenigen in der dritten und vierten hingegen mit Rücksicht auf Streben und Pfosten. Ein Vergleich dieser beiden Summen zeigt, dass H nur um 2,65 % grösser wird, wenn wir die elastischen Gewichte der Streben und Pfosten berücksichtigen.

Nr.	z	z	$z:m$	$z:m$	Differenz
1	0	0,53	0	0,069	0,069
3	1,87	2,01	0,247	0,268	0,016
5	3,72	3,93	0,492	0,513	0,021
7	5,55	5,77	0,735	0,755	0,020
9	7,31	7,57	0,968	0,988	0,020
11	8,98	9,25	1,188	1,208	0,020
13	10,42	10,73	1,378	1,400	0,022
15	11,34	11,52	1,500	1,503	0,003
Mitte	11,71	11,83	1,548	1,543	—0,005
			14,554	14,939	

40. Berechnung eines Bogens mit zwei Gelenken und gekrümmten Gurtungen.

(Kaubachbrücke.)

(Tafel 2.)

Auf Tafel 2 soll eine Brücke mit gekrümmten Gurtungen behandelt werden. Es ist dies die Eisenbahnbrücke über den Kaubach (Appenzellerbahn). Diese Brücke besteht aus zwei Bogenträgern, die eine Spannweite von 55 m besitzen. Die Achse des Bogens ist parabolisch und hat einen Pfeil von 12 m. Der Bogen selber besitzt eine konstante Höhe von 2 m, er ist fachwerkförmig und hat Feldweiten von 2,50 m. Jeder zweite Knotenpunkt trägt einen Fahrbahnpfosten. Die Fahrbahn wird also durch 11 Pfosten auf den Bogen gestützt.

a) Elastische Gewichte u. s. w.

Man beginnt auch hier die Arbeit mit der Ermittlung der elastischen Gewichte der Gurtstäbe. Diejenigen der Streben und Pfosten können wir hier noch viel eher vernachlässigen, als im vorigen Beispiel, da die Drehpunkte infolge der parallelen Gurtungen weit abseits zu liegen kommen. Wir schreiben wieder die s, y, F und a in eine Tabelle ein, berechnen die $\varDelta w$ und zugleich auch die Produkte $\varDelta w . y$. Dann bilden wir die Summen dieser zwei letzten Werte und erhalten durch Division den Abstand der M-Linie von der Bogensehne. (Vgl. Nr. 39, Tafel 1.) In unserem Beispiel ist $m = 9{,}46$ m.

Nun tragen wir die elastischen Gewichte lotrecht und wagrecht auf und zeichnen die beiden Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$. Die Schnittpunkte der äussersten Seilseiten liefern den Mittelpunkt der elastischen Gewichte, wodurch wir eine Kontrolle für die Strecke m erhalten.

Ferner wird die Kämpferdrucklinie gezeichnet, indem man sich eine Last von einem Fahrbahnpfosten zum andern wandern denkt und für jede dieser Stellungen die Konstruktion der Textfig. 35 durchführt.

b) Einfluss des Eigengewichtes.

Nach diesen vorbereitenden Arbeiten kann man sich daran machen den Einfluss des Eigengewichtes zu ermitteln. Die Eigenlast für eine Tragwand beträgt pro laufenden Meter $g = 1{,}50$ t. Auf einen Fahrbahpfosten fällt somit eine Last von 7,5 t. Die lotrechte Komponente des Auflagerdruckes ist daher $A_g = 41{,}25$ t und der Horizontalschub beträgt $H_g = 47{,}0$ t.

An die Kräfte A_g und H_g lässt sich nun ohne weitere Schwierigkeit ein Cremona-Plan anschliessen. Da man dabei aber zu den kurzen Gurtungsstäben lange Parallele ziehen muss, tut man gut, die in den Gurtungen auftretenden Kräfte mittels des Momentenverfahrens zu berechnen und sie in den Kräfteplan einzutragen. Der Symmetrie wegen kann man den Plan auf die Hälfte beschränken.

c) Einfluss der zufälligen Last.

Zunächst wird der Plan der K-Kräfte gezeichnet für eine in A horizontal wirkende Kraft $P = 7{,}5$ t. Zur grösseren Genauigkeit haben wir auch hier die Gurtstäbe nach dem Momentenverfahren

berechnet. Dann werden nach den Regeln der Nr. 20 die Einflusslinien gezeichnet. Für die Gurtstäbe, deren Drehpunkte unter den Fahrbahnpfosten liegen, gestaltet sich die Konstruktion genau wie beim Bogen mit geradem Obergurt. Für den Stab 19 ist sie punktiert in die Figur eingezeichnet. Für die andern Gurtstäbe (z. B. Stab 20) hat man die Spitze der Einflussfläche, die unter dem Drehpunkt liegt, durch eine Linie abzuschneiden, deren Endpunkte lotrecht unter den benachbarten Fahrbahnpfosten sich befinden. Bei den Streben ist zu beachten, dass die beiden mittleren Ecken der Einflussfläche hier nicht unter die Endpunkte der Strebe, sondern unter die benachbarten Fahrbahnpfosten zu liegen kommen.

Wie schon in Nr. 20 bemerkt wurde, ist dies Verfahren zur Konstruktion der Einflussfläche nur für die Streben in der Nähe des Auflagers brauchbar. Für diejenigen in der Nähe des Scheitels haben wir das in der Fig. 45 (S. 79) erläuterte Verfahren anzuwenden. Um z. B. die Einflussfläche für die Strebe 13—14 zu erhalten, lassen wir eine Last $P = 2$ t zuerst im Knotenpunkt 13 und dann in 15 angreifen und bestimmen daraus die Strebenkräfte S und S'. Mit Hilfe dieser Grössen zeichnet man die Einflusslinie für die Vertikalkräfte. Davon zieht man diejenige für den Horizontalschub ab, indem man die Ordinaten z mit dem Verhältnis $\frac{K}{m}$ multipliziert und die Ergebnisse von der Geraden $A_1 B_1$ aus aufträgt. Für die mittlere Ordinate erhält man dabei

$$CC' = \frac{Kc}{m} = \frac{1{,}21 \,.\, 33{,}6}{37{,}84} = 1{,}07 \text{ cm}.$$

Um nun aus den Einflussflächen die maximalen und minimalen Stabkräfte zu erhalten, zeichnen wir die vorschriftsmässe Lastenreihe, die für die Schweiz z. B. aus einem Zug von 3 Lokomotiven in ungünstigster Stellung und einseitig angehängten Güterwagen besteht, mit lotrechten Strichen auf ein Stück Pauspapier und bestimmen durch Probieren die grössten und kleinsten Ordinatensummen. Für den Stab 19 sind diese beiden Laststellungen eingezeichnet. Diese Summen werden bei dem zuerst angewandten Verfahren in die Formel

$$S = \frac{K \,.\, \Sigma(z)}{m}$$

eingesetzt und man erhält dadurch die Grenzwerte der Stabkräfte. Bei den Streben in der Nähe des Scheitels, wo also das zweite Ver-

fahren anzuwenden ist, stellt die Ordinatensumme direkt die Stabkraft dar und zwar in demselben Massstabe, in welchem man die Kraft P aufgetragen hat. In unserem Beispiel ist der Massstab 1 cm = 1 t; da wir aber mit einer Kraft $P = 2$ t gezeichnet haben, müssen wir noch mit 3,75 multiplizieren.

d) Einfluss der Temperatur- und Bremskraft.

Um den Einfluss der Temperaturschwankungen zu ermitteln, lässt man genau wie beim Bogen mit geradem Obergurt die Kraft

$$T = \frac{E \cdot \alpha \cdot t \cdot l}{w \cdot m}$$

in A horizontal wirken und bestimmt die Stabkräfte mittels des Cremona-Planes für die K-Kräfte. In unserem Beispiele erhalten wir eine Temperaturkraft $T = 3{,}22$ t. Wir haben also einfach die Kräfte in diesem Plan im Massstab 1 cm = 2,15 t abzugreifen, um die gesuchten Stakbräfte infolge der Temperaturschwankungen zu erhalten.

Schliesslich wollen wir noch den Einfluss der Bremskraft bestimmen, die im Punkte 23 angreift. Um ihre Grösse zu erhalten, denken wir uns die ganze Brücke belastet und dividieren das Gewicht der Belastung durch 6. Nun haben gerade 3 Lokomotiven und 1 Wagen auf der 55 m langen Brücke Platz; die Last ist also 140 t, und für die Bremskraft ergibt sich $F = 24$ t. Aus Grösse und Lage können nun leicht die Auflagerdrücke bestimmt werden, an welche ein Cremona-Plan für die Bremskräfte (S_b) angeschlossen wird; dieser braucht der Symmetrie wegen natürlich nur bis zum Scheitel des Bogens geführt zu werden.

Schliesslich hat man noch die verschiedenen Einflüsse zu kombinieren und Maximum und Minimum der Stabkräfte, sowie die vorhandenen Spannungen zu bestimmen, was in der nachfolgenden Tabelle für die vier behandelten Stäbe geschehen ist.

Stab-Nr.	S_g	K	$\Sigma(z)$ max.	$\Sigma(z)$ min.	S_p max.	S_p min.	S_t	S_b	S_{tot} max.	S_{tot} min.	F	σ_{vorh}
	t	t	cm	cm	t	t	t	t	t	t	cm²	t : cm²
$O_{19\cdot21}$	−25,1	+40.8	−6,58	+1,22	−70,9	+13,2	±17,6	± 5,6	−119,2	+11,3	192	−0,62
$U_{18\cdot20}$	−20,0	−47,3	+5,22	−2,40	−65,2	+30,1	±20,4	±12,0	−117,6	+42,5	192	−0,61
$S_{5\cdot6}$	+ 2,2	+ 5,9	+13,7	−9,50	+21,4	−14,8	± 2,5	± 2,9	+ 29,0	−18,0	50	+0,58
$S_{13\cdot14}$	+ 2,6	—	—	—	+20,5	−14,8	± 1,9	± 1,3	+ 26,3	−15,4	50	+0,53

Drittes Kapitel.

Bogen mit einem Gelenk.

41. Bestimmung der Gelenkkraft.

Bogen mit einem Gelenke sind im allgemeinen zweifach statisch unbestimmt. Der durch die Fig. 82 dargestellte Bogen besitzt 23 Knotenpunkte, 40 Stäbe und 4 feste Stützpunkte, also 8 Auflagerbahnen; es ist demnach $s + a - 2k = 40 + 8 - 46 = 2$. Die statische Berechnung solcher Bogen gestaltet sich umständlicher, als diejenige der zweigelenkigen Bogen, weil sich keine Kurve mehr zeichnen lässt, die für alle Stäbe als Einflusslinie dienen kann.

Die Drucklinie AEB für eine einzelne Last P muss durch das Gelenk C gehen; welche Richtungen jedoch die beiden Auflagerdrücke R und R' besitzen, ist zunächst unbekannt und lässt sich nur durch Betrachtungen über die elastischen Formänderungen ermitteln.

Wir zerlegen den linken Auflagerdruck R in die Teilkräfte V und H und gehen zunächst darauf aus, diese zu bestimmen. Sind die Kräfte V und H für eine gegebene Last bekannt, so sind damit auch die beiden Auflagerdrücke bestimmt.

Um die Aufgabe zu lösen, legen wir durch C zwei rechtwinklige Achsen und berechnen für jeden Gurtstab die Werte

$$\Delta w_1 = \frac{s x}{E F a^2} \quad \text{und} \quad \Delta w_2 = \frac{s y}{E F a^2},$$

worin s die Stablänge, F die Querschnittsfläche des Stabes, a den Abstand des Stabes vom Drehpunkt und x und y die Entfernungen des Drehpunktes von den Hauptachsen bezeichnen. Die Grössen Δw nennen wir, wie früher, elastische Gewichte zweiter Ordnung. Die Summe aller Δw_1 ist bei symmetrischer Bogenform null, die Summe aller Δw_2 bezeichnen wir mit w_2.

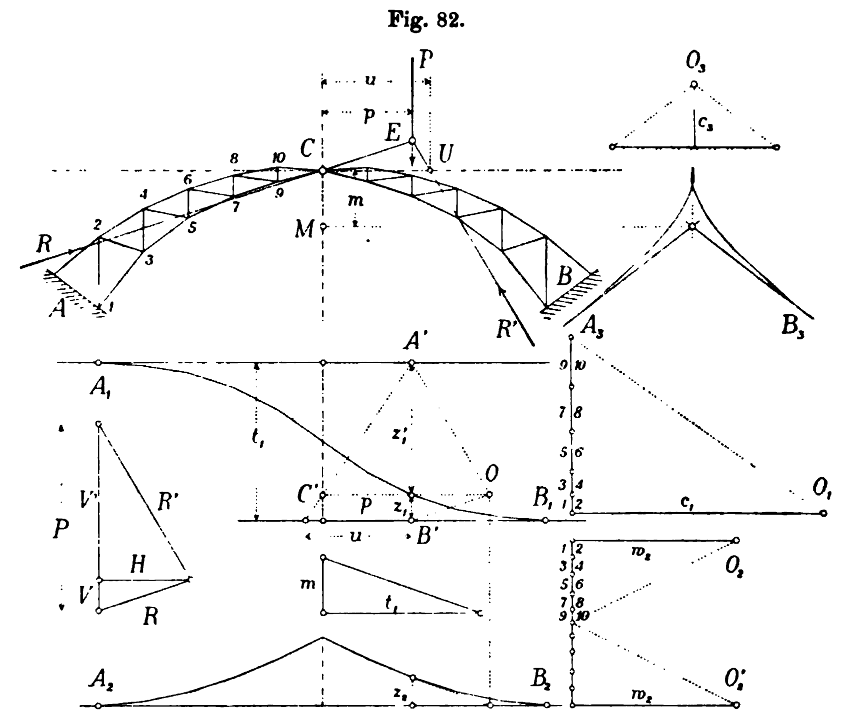
Die Gewichte Δw betrachten wir jetzt als Kräfte, die in den entsprechenden Drehpunkten angreifen, und zeichnen damit drei Seilpolygone.

1. Seileck $A_1 B_1$: Kräfte $= \Delta w_1$, Richtung lotrecht,
2. „ $A_2 B_2$: „ $= \Delta w_2$, „ „
3. „ $A_3 B_3$: „ $= \Delta w_2$, „ wagrecht.

Die Polweite des ersten und dritten Seilecks nehmen wir beliebig an, die Polweite des zweiten machen wir gleich w_2.

Da die Δw_1 für die eine Bogenhälfte positiv, für die andere negativ sind, so nimmt das Seileck $A_1 B_1$ die Form einer *S*-Kurve

Fig. 82.



an. Das zweite Seileck zeichnen wir so, dass es an beiden Enden wagrecht beginnt und die beiden Hälften in der Mitte in einer Spitze zusammenlaufen; der Pol O_2 muss zu diesem Zwecke zwei verschiedene Lagen annehmen. Die Seiten des dritten Seilecks laufen parallel zu den Strahlen aus O_3. (Fig. 82 oben.)

Der Schnittpunkt der äussersten Seilseiten des dritten Seilecks führt zu dem Punkte *M*, dem Schwerpunkte aller Δw_2.

Wir denken uns jetzt, die beiden Bogenhälften seien in *C* voneinander gelöst und fragen, wie sich die Spitze der rechtsseitigen Hälfte elastisch verschiebt, wenn die Kraft *P* auf dieselbe einwirkt.

Dabei trennen wir die Verschiebung in eine lotrechte und eine wagrechte. Diese Verschiebungen müssen unter der Wirkung der Gelenkkraft wieder verschwinden, und zwar macht V die lotrechte und H die wagrechte Verschiebung rückgängig. Auf diese Weise gelingt es, die beiden Kräfte zu bestimmen.

Die elastischen Verschiebungen lassen sich nach den Erörterungen der Nr. 15 stets als statische Momente auffassen. Die Verschiebung in der Richtung der lotrechten Achse ist gleich der wirkenden Kraft mal dem statischen Momente der Δw_1, bezogen auf die Kraftrichtung, und die Verschiebung in der Richtung der wagrechten Achse ist gleich der wirkenden Kraft mal dem statischen Momente der Δw_2, bezogen auf die Kraftrichtung. Dabei kommen für P nur die Δw zwischen der Last und dem Auflager B in Betracht.

Das statische Moment der Δw_1 bezogen auf die Richtung der Kraft P ist nach der Theorie des Seilpolygons gleich $c_1 z_1$, das statische Moment der Δw_2 gleich $w_2 z_2$. Also ist

die lotrechte Verschiebung des Punktes C: $v = P c_1 z_1$,

„ wagrechte „ „ „ C: $h = P w_2 z_2$.

Lassen wir jetzt die Kraft V auf den Bogen einwirken, so müssen wir die Gewichte des ganzen Bogens in Betracht ziehen. Das statische Moment sämtlicher Δw_1 in Bezug auf die lotrechte Hauptachse ist aber gleich $c_1 t_1$, folglich finden wir

$$v = V c_1 t_1.$$

Gelangt ferner die Kraft H zur Wirkung, so findet man deren Einfluss auf die wagrechte Verschiebung im Gelenke gleich H mal dem statischen Moment sämtlicher Δw_2, bezogen auf die wagrechte Hauptachse. Dieses Moment ist, da M der Schwerpunkt sämtlicher Δw_2 ist, gleich $w_2 m$, also

$$h = H w_2 m.$$

Setzt man $v = v$ und $h = h$, so wird

$$V = \frac{P z_1}{t_1},$$

$$H = \frac{P z_2}{m}.$$

Man sieht, dass das Seileck $A_1 B_1$ die Einflusslinie für V, das Seileck $A_2 B_2$ diejenige für H ist.

Aus der Grösse der Kräfte V und H lässt sich schliesslich leicht die Richtung von R finden.

Es verhält sich

$$V:H = \frac{P z_1}{t_1} : \frac{P z_2}{m} = z_1 : \frac{t_1 z_2}{m}.$$

Zeichnet man (Fig. 82 unten) ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten t_1 und m und zieht durch den Endpunkt von z_2 eine Parallele zur Hypothenuse, so wird auf der Linie $A_2 B_2$ die Strecke $\frac{t_1 z_2}{m}$ abgeschnitten. Lotet man den Endpunkt dieser Strecke hinauf nach O und verbindet O mit B', so stellt OB' die Richtung von R dar. Die Richtung von R' wird durch OA' gegeben.

Um die Drucklinie für die Last P zu zeichnen, braucht man demnach nur durch C eine Parallele zu OB' und durch E eine Parallele zu OA' zu ziehen.

Der Auflagerdruck R' schneide die wagrechte Hauptachse im Punkte U; die Entfernung CU sei u. Denkt man sich R' in U wagrecht und lotrecht zerlegt und setzt die statischen Momente von R' und P in Bezug auf C einander gleich, so folgt $V'.u = P.p$ oder

$$u = \frac{P.p}{V'} = \frac{p.t_1}{z'_1}.$$

Verbindet man A' mit C', so wird auf der Linie $B_1 B'$ die Strecke u abgeschnitten und kann nach oben übertragen werden. Man gewinnt dadurch etwas genauere Ergebnisse, namentlich für Lasten in der Nähe des Auflagers.

Wenn der Bogen, wie wir vorläufig vorausgesetzt haben, symmetrisch gebaut ist, so können die vorliegenden Seilecke natürlich auf die Hälfte beschränkt werden.

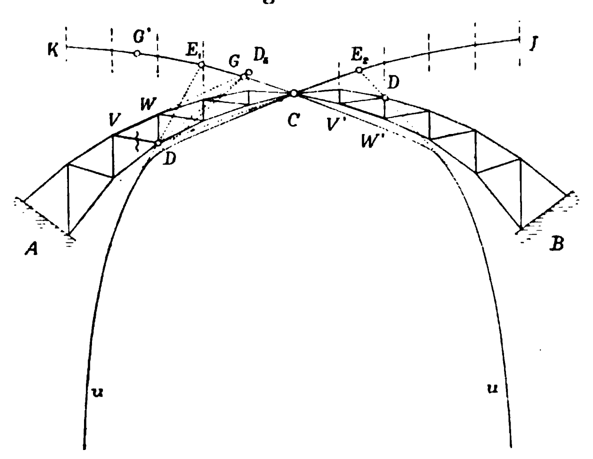
42. Kämpferdruck- und Umhüllungslinien; ungünstigste Belastungen.

Bewegt sich die Last P von C bis B, so beschreibt der Punkt E (Fig. 83) eine Kurve, die „Kämpferdrucklinie"; der linksseitige Auflagerdruck R geht beständig durch C, der rechtsseitige Druck R' aber berührt eine zweite Kurve, die „Umhüllungslinie". Bewegt sich P von C nach A, so stellen sich dieselben Kurven auf der linken Seite ein. In der Fig. 83 ist KCL die Kämpferdrucklinie, die Umhüllungslinien sind mit den Buchstaben u bezeichnet.

Um diese Kurven zu erhalten, braucht man nur die Last P an verschiedenen Stellen aufzulegen und die Zeichnung der vorigen Nummer zu wiederholen.

Sind Kämpferdruck- und Umhüllungslinien bekannt, so lassen sich leicht die Grenzen der ungünstigsten Belastungen angeben. Man braucht zu diesem Zwecke bloss durch den Drehpunkt des Stabes eine Linie durch C und eine Tangente an die Umhüllungskurve zu ziehen und die Kämpferdrucklinie damit anzuschneiden. In der Fig. 83 sind E_1 und E_2 die Grenzpunkte der ungünstigsten Belastung für den Stab VW. Für die Lasten zwischen E_1 und E_2 geht die Drucklinie, wie man sofort erkennt, unterhalb D durch;

Fig. 83.



die äussere Kraft dreht daher in negativem Sinne um D und beansprucht den Stab auf Zug. Für Lasten ausserhalb der Strecke $E_1 E_2$ gilt das umgekehrte, die Drucklinie liegt oberhalb D, es entsteht positives Moment und der Stab wird auf Druck beansprucht.

Zuweilen ergibt sich bloss eine einzige Belastungsgrenze. Führt man die Zeichnung für den Stab $V' W'$ mit dem Drehpunkte D' durch, so kommt der Schnittpunkt der Linie $D' C$ mit der Kämpferdrucklinie ausserhalb der Spannweite zu liegen, und es bleibt nur der Punkt E_2 übrig. Lasten links von E_2 ergeben eine Drucklinie unterhalb, Lasten rechts davon eine solche oberhalb D'; erstere beanspruchen daher den Stab auf Druck, letztere auf Zug.

Ähnlich hat man vorzugehen, wenn der zu berechnende Stab eine Strebe ist. Auch hier zieht man, um die Belastungsgrenzen

zu bestimmen, durch den Drehpunkt des Stabes eine Linie nach dem Gelenk C und eine (unter Umständen zwei) Tangente an die Kurven u. Ausserdem bildet gewöhnlich auch der Querschnitt des Bogens, der die betreffende Strebe trifft, eine Belastungsgrenze. In zweifelhaften Fällen bestimmt man so viele Grenzpunkte, als sich nach der angegebenen Regel überhaupt bestimmen lassen und prüft nun für jede Teilstrecke, ob die auf ihr befindlichen Lasten den Stab in dem einen oder in dem andern Sinne beanspruchen.

43. Einfluss des Eigengewichtes.

Um den Einfluss des Eigengewichtes auf die Stabkräfte zu finden, summiert man mit dem Zirkel unter sämtlichen Fahrbahnpfosten die Ordinaten z_1 und z_2 der Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$. Dann ist, wenn $P = gf$ die auf einen Pfosten treffende Last bedeutet,

$$V = \frac{P \cdot \Sigma(z_1)}{t_1} \text{ und } H = \frac{P \cdot \Sigma(z_2)}{m}.$$

Hat man diese beiden Kräfte ausgerechnet, so ist der linke Auflagerdruck bestimmt; der rechte ergibt sich von selbst aus der Zusammensetzung von $\Sigma(P)$ und R. Bei symmetrischen Bogen ist natürlich $V = V' = \frac{1}{2}\Sigma(P)$; was unsymmetrische Bogen anbetrifft, siehe Nummer 46.

Nun wird an der Hand dieses Kraftecks die Drucklinie für Eigengewicht gezeichnet; man beginnt damit am einfachsten im Scheitelgelenk und setzt die Zeichnung nach beiden Seiten hin fort. Ist dies geschehen, so lassen sich beliebige Stabkräfte mittels des Momenten- oder Schnittverfahrens bestimmen. Gewöhnlich wird man es jedoch vorziehen, einen Cremona-Plan zu zeichnen, der sämtliche Stabkräfte enthält.

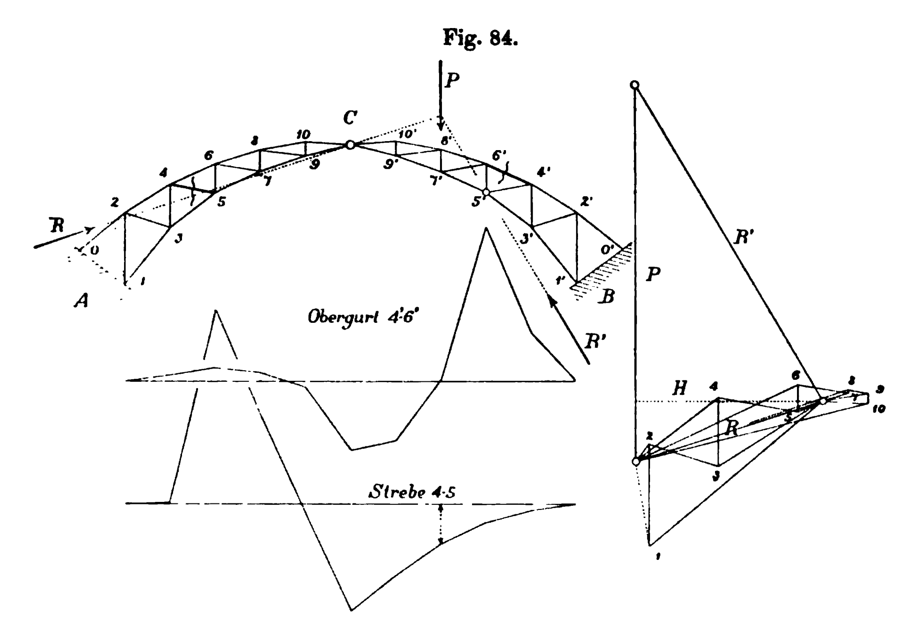
44. Einflusslinien für die Stabkräfte.

Zur statischen Berechnung eines Bogens mit einem Gelenke verwendet man, so weit das eigene Gewicht in Betracht fällt, gewöhnlich einen Cremona'schen Kräfteplan. Dasselbe gilt bei der Berechnung von Dachstühlen, bei denen ausser dem Eigengewicht noch Schnee und Wind berücksichtigt werden müssen. (Vgl. Nr. 25.)

Zur Berechnung von Brücken mit ihren verwickelteren Belastungsverhältnissen verwendet man im allgemeinen am besten Einflusslinien. Eisenbahnbrücken, bei denen die zufällige Last aus einer unregelmässigen Reihe von Einzellasten besteht, lassen sich nicht ohne Einflusslinien berechnen; bei Strassenbrücken kann man sich auch des sogenannten älteren Verfahrens bedienen (Nr. 49); es ist kürzer, aber nicht so übersichtlich wie jenes.

Da der Bogen mit einem Gelenke zweifach statisch unbestimmt ist, so gibt es, um die Einflusslinien zu zeichnen, kein so einfaches

Fig. 84.



Mittel mehr wie beim Bogen mit zwei Gelenken. Während dort ein einziges Seileck der Ausgangspunkt für die Einflussflächen sämtlicher Stäbe bildete, sind wir hier genötigt, die Einflusslinien Stück für Stück aus einzelnen Ordinaten zusammenzusetzen.

Man denkt sich zunächst, jeder Pfosten sei mit der massgebenden Kraft P belastet und zeichnet für jede einzelne Kraft einen Cremona'schen Plan, der sich über den ganzen Bogen ausdehnt; bei symmetrischer Anordnung beschränkt man sich auf die Hälfte. In der Fig. 84 ist dieser Plan für die über dem Punkte 8′ stehende Last gezeichnet. Zunächst zerlegt man P nach Fig. 82 in R und R' und fängt dann am linken Auflager mit der Zerlegung an. Zuerst

wird die Kraft R nach dem Schnittverfahren (Teil II, Nr. 4) in die Richtungen 0 2, 1 2 und 1 3 zerlegt, dann setzt man den Plan in üblicher Weise fort und erhält schliesslich beim Gelenke C eine Probe für die Genauigkeit der Zeichnung. Man kann die Zerlegung auch im Scheitelgelenke beginnen und nach beiden Seiten hin fortsetzen; das erstere Verfahren ist aber der Sicherheit wegen vorzuziehen.

Hat man die Cremona-Pläne für sämtliche Lasten P gezeichnet, so greift man die gleichnummerigen Kräfte mit dem Zirkel ab und trägt sie unter der entsprechenden Last von einer Grundlinie aus als Ordinaten auf. In der Fig. 84 sind die Einflusslinien für den Gurtstab 4′ 6′ und für die Strebe 4 5 dargestellt.

Ist die Zahl der Streben gross, so wird das Zeichnen der Cremona-Pläne zeitraubend und, was schlimmer ist, ungenau, weil das Aneinanderreihen von Strichen, von denen jeder sich auf die vorhergehenden stützt, stets eine Quelle von Ungenauigkeiten in sich birgt. Bei grösseren Trägern empfiehlt es sich, die Stabkräfte für die Gurtungen nach dem Momentenverfahren (Teil II, Nr. 6), die Strebenkräfte nach dem Schnittverfahren (Teil II, Nr. 4) zu bestimmen. Da jede Kraft hierbei unabhängig von den vorhergehenden bestimmt wird, so können sich etwaige Fehler nicht fortpflanzen; auch kann man einzelne Stäbe ganz ausscheiden und ihre grössten und kleinsten Kräfte durch Interpolieren bestimmen. In Nr. 58 des kommenden Kapitels wird dieses Verfahren eingehender beschrieben werden.

Wie man schliesslich die Einflussflächen benutzt, um die grössten und kleinsten Stabkräfte zu erhalten, braucht nicht näher erklärt zu werden.

45. Einfluss der Wärme.

Nimmt die Wärme im Innern der Bogenstäbe um t Grade zu und können sich die Spitzen der beiden Bogenhälften ungehindert bewegen, so verschieben sie sich gegenseitig wagrecht um die Strecke $\Delta l = \alpha t l$, worin l die Spannweite und α den Ausdehnungskoeffizienten des Baustoffes bezeichnet. Da diese Verschiebung tatsächlich nicht stattfinden kann, so entsteht im Gelenke eine wagrechte Kraft T, die so beschaffen ist, dass sie die Verschiebung wieder rückgängig

macht. Nach früher (S. 167) bewirkt die Kraft T eine wagrechte Verschiebung $\Delta l = T w_2 m$. Daraus folgt

$$T = \frac{\alpha t l}{w_2 m}.$$

Hat man bei der Berechnung der elastischen Gewichte den Elastizitätsmodul gleich eins gesetzt, so muss er nachträglich wieder hinzugefügt werden, also ist

$$T = \frac{\alpha t l}{w_2 m} \cdot E.$$

Welche Spannungen in den Stäben des Bogens infolge der Wärmezunahme entstehen, ist nun leicht zu bestimmen, man braucht bloss die Kraft T im Gelenke wirken zu lassen und dazu einen Cremona-Plan zu zeichnen.

Was die Spannweite l betrifft, so misst man sie am besten von Punkt 1 zu Punkt 1 (Fig. 84), weil diese Punkte mit dem Bogen unverschieblich verbunden sind, während der Stab 0 2 sich um den Knotenpunkt 2 etwas drehen kann. Besitzt der Bogen zweifachen Strebenzug (gekreuzte Streben) und wird einer der Stützpunkte auf Rollen gelagert oder durch längliche Schraubenlöcher verschiebbar eingerichtet, so ist die Entfernung der beiden fest gelagerten Punkte als Spannweite anzusehen. Werden beide Punkte fest mit dem Widerlager verbunden, so wählt man für l am besten die Entfernung von Mitte zu Mitte der Auflager.

Werden nicht sämtliche Stäbe, sondern nur ein Teil derselben erwärmt, z. B. nur die oberen Gurtstäbe, so setzt man

$$\Delta l = \alpha t . \Sigma \left(\frac{s y}{a} \right),$$

wobei die Länge a für diejenigen Stäbe, die von der Temperaturkraft gedrückt werden, positiv, für die andern negativ einzusetzen ist. (Vgl. Nr. 21.)

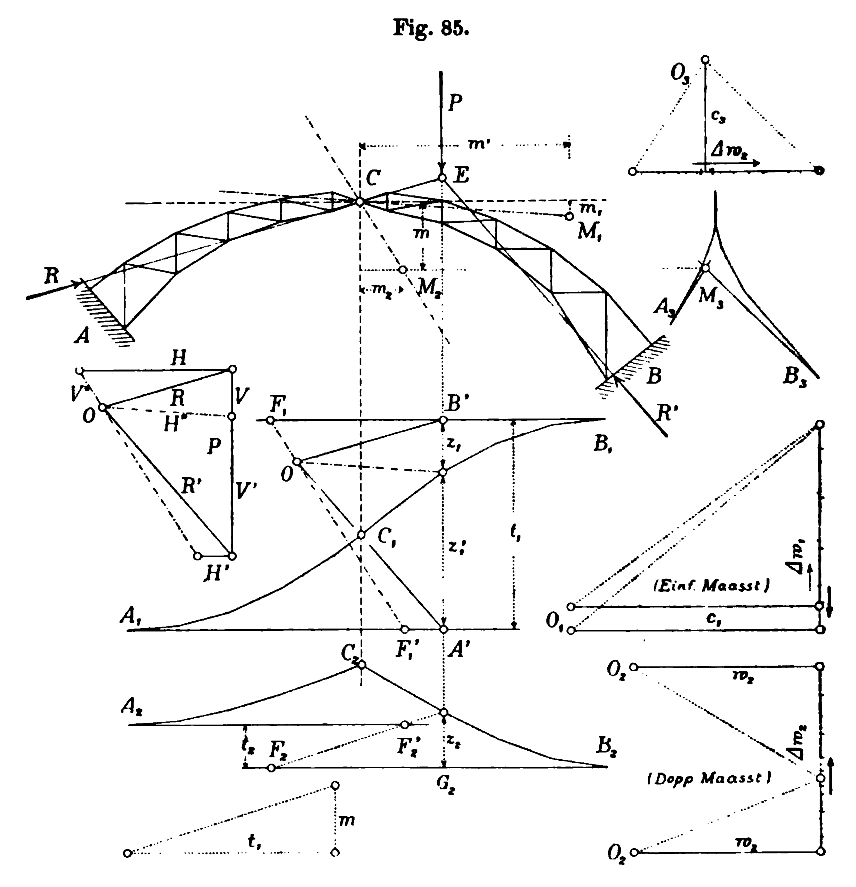
46. Unsymmetrische Bogen.

Ist der Bogen unsymmetrisch gebaut, so ändert sich das Rechnungsverfahren in folgender Weise (Fig. 85).

Zunächst berechnet man, wie früher, die Gewichte $\Delta w_1 = \frac{s x}{E F a^2}$ und $\Delta w_2 = \frac{s y}{E F a^2}$. Dann zeichnet man wiederum die drei Seilecke

$A_1 B_1$, $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$. Die Polweiten c_1 und c_3 sind beliebig. Im ersten Seileck wirken die $\varDelta w_1$ lotrecht, im zweiten die $\varDelta w_2$ lotrecht und im dritten die $\varDelta w_2$ wagrecht. Das erste Seileck richtet man so ein, dass die äussersten Seiten wagrecht laufen und beide Hälften in C_1 sich treffen. Das Krafteck bekommt zu diesem Zwecke zwei

Fig. 85.



verschiedene Pole O_1. Auch beim zweiten Seileck sorgt man dafür, dass die erste und die letzte Seite wagrecht verlaufen.

Mittels der drei Seilecke lassen sich nun die beiden Schwerpunkte M_1 und M_2 der elastischen Gewichte bestimmen.

Der Punkt M_2 liegt auf der Wagrechten durch M_3 und seine Entfernung von der y-Achse ist gleich dem Abstand t_2 der äussersten Seiten des zweiten Seileckes; denn dieser Abstand stellt das statische Moment der Gewichte $\varDelta w_2$ in Bezug auf die y-Achse dar.

Der Punkt M_1 fällt häufig weit abseits, bei symmetrischen Bogen ins Unendliche. Glücklicherweise braucht man den Punkt selbst nicht, sondern nur seine Verbindungslinie mit C, und diese lässt sich folgendermassen finden.

Nennt man, wie früher, $\Delta g = \frac{s}{E F a^2}$ das Gewicht erster Ordnung, so ist $\Delta w_1 = x . \Delta g$ und $\Delta w_2 = y . \Delta g$. Nun ist das Zentrifugalmoment der Gewichte Δg bezogen auf die beiden Hauptachsen einmal gleich der Gewichtssumme w_1 mal dem Abstand m_1, andererseits gleich der Gewichtssumme w_2 mal dem Abstand m_2, also ist $w_1 m_1 = w_2 m_2$. Sodann ist das statische Moment der Gewichte Δw_1 bezogen auf die y-Achse einerseits gleich $w_1 m'$, andererseits gleich $c_1 t_1$. Daraus folgt

$$m' : m_1 = \frac{c_1 t_1}{w_1} : \frac{w_2 m_2}{w_1} = c_1 t_1 : w_2 m_2 .$$

Um die Richtung der Linie $C M_1$ zu finden, braucht man also nur die Produkte $c_1 t_1$ und $w_2 m_2$ auszurechnen und von C aus das eine wagrecht, das andere lotrecht aufzutragen.

Ruht nun auf dem Bogen die Last P, so verschiebt sich die Spitze der rechten Bogenhälfte, während die linke fest bleibt, lotrecht um die Strecke $v = P c_1 z_1$ und wagrecht um die Strecke $h = P w_2 z_2$ (vgl. S. 167). Diese Bewegungen muss der Auflagerdruck R rückgängig machen. Zerlegt man R parallel zu $C M_1$ und zur y-Achse in die Komponenten V und H^* (Fig. 85 links), so erzeugt die Kraft H^* ausschliesslich eine wagrechte Verschiebung, obgleich sie nicht wagrecht wirkt. Aber die zu erwartende lotrechte Verschiebung ist gleich null; denn sie ist ja gleich der Kraft H^* mal dem statischen Momente der Gewichte Δw_1 bezogen auf die Kraftrichtung, und da diese durch M_1, den Schwerpunkt der Δw_1 geht, ist das statische Moment null. Daraus folgt, dass die lotrechte Verschiebung ausschliesslich durch die Kraft V vernichtet werden muss. Diese Verschiebung ist aber gleich V mal dem statischen Momente der Δw_1 bezogen auf die y-Achse, also $v = V w_1 m' = V c_1 t_1$, woraus folgt

$$V = \frac{P z_1}{t_1} .$$

Zerlegt man zweitens R parallel zu $C M_2$ und zur x-Achse in H und V^*, so folgt nach derselben Überlegung, dass die wagrechte

Verschiebung allein durch die Kraft H vernichtet wird, also ist $h = H w_2 m$ oder

$$H = \frac{P z_2}{m}.$$

Die beiden Ausdrücke für V und H sind die nämlichen wie bei symmetrischer Anordnung des Bogens, nur haben V und H eine etwas abweichende Bedeutung.

Es verhält sich ferner

$$V : H = z_1 : \frac{z_2 t_1}{m}.$$

Zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten t_1 und m (Fig. 85 unten) und zieht durch den Endpunkt von z_2 eine Parallele zur Hypothenuse, so ist $F_2 G_2 = \frac{z_2 t_1}{m}$. Lotet man F_2 hinauf nach F_1, zieht durch F_1 eine Parallele zu CM_2 und durch den Endpunkt von z_1 eine Parallele zu CM_1, so ist OB' die Richtung von R; denn das Dreieck $O z_1$ ist dem Kraftdreieck RVH* ähnlich. Ebenso ist OA' die Richtung von R'. Lotet man auch den Punkt F_2' hinauf nach F_1', so läuft die Verbindungslinie $F_1 F_1'$ parallel zu CM_2, was als Probe dienen kann.

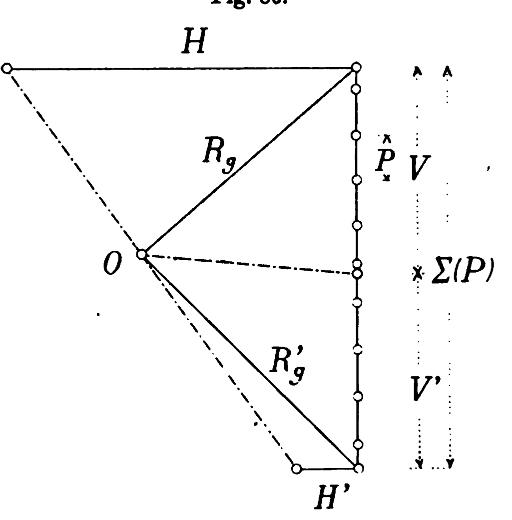
Bei symmetrischer Anordnung des Bogens wird CM_2 lotrecht und CM_1 wagrecht und die Zeichnung geht in die alte über.

Von hier ab unterscheidet sich die statische Berechnung in keiner Weise von der in den frühern Nummern beschriebenen; Kämpferdruck- und Umhüllungslinien ergeben sich auf dem gewöhnlichen Wege.

Der Einfluss des eigenen Gewichtes wird in folgender Weise bestimmt. Wie beim symmetrischen Bogen berechnet man $V = \frac{P . \Sigma(z_1)}{t_1}$ und $H = \frac{P . \Sigma(z_2)}{m}$, wo $P = gf$ die auf einen Pfosten treffende Last bedeutet, und bestimmt daraus den linken Auflagerdruck; der rechte ergibt sich von selbst aus der Zusammensetzung von $\Sigma(P)$ und R. Zur Sicherheit kann man auch noch die Komponenten V' und H' des rechten Auflagerdruckes bestimmen, indem man an Stelle von z_1 und z_2 die Ordinaten z_1' und z_2' misst. Dann trägt man die Lasten P lotrecht auf und teilt ihre Summe in V und V' (Fig. 86). Hierauf zeichnet man die wagrechten Kräfte H und H' auf, verbindet ihre Endpunkte und zieht durch den Trennungspunkt

von V und V' eine Parallele zu CM_1, die zum Pole O führt. Schliesslich zieht man noch die Auflagerdrücke R_g und R_g' und zeichnet an der Hand dieses Kraftecks die Drucklinie für Eigengewicht. Die Bestimmung der Stabkräfte erfolgt ganz wie beim symmetrischen Bogen.

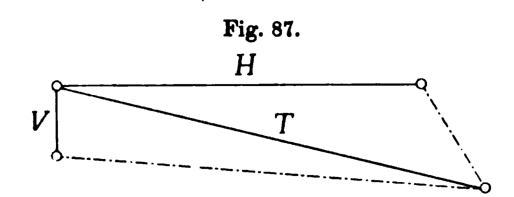
Fig. 86.



Ebenso lassen sich die Einflusslinien nach dem früher beschriebenen Verfahren zeichnen. Einzig die Bestimmung der Temperaturkraft verlangt noch eine besondere Betrachtung.

Nennt man die wagrechte Projektion der Bogensehne l und die senkrechte k, so ist die wagrechte Verschiebung im Gelenke gleich $\alpha t l$ und die senkrechte gleich $\alpha t k$. Zerlegt man (Fig. 87)

Fig. 87.



die Temperaturkraft T parallel zu CM_1 und zur y-Achse, so muss die zweite Komponente die lotrechte Bewegung rückgängig machen, also ist

$$V_t = \frac{\alpha t k}{c_1 t_1}.$$

Zerlegt man T zweitens parallel zu CM_2 und zur x-Achse, so ist die letztere Komponente

$$H_t = \frac{\alpha t l}{w m_2}.$$

Sind die Kräfte V_t und H_t berechnet, so führt eine einfache Zeichnung zum Ziele.

47. Vollwandige Bogen.

Vollwandige Bogen mit I-förmigem Querschnitt können wie fachwerkförmige berechnet werden, wenn man den Kopf des Querschnittes als Obergurt und den Fuss als Untergurt ansieht. Das ist jedoch ein Notbehelf; der richtige Weg ist der folgende.

Man zerlegt den Träger der Pfostenteilung entsprechend in Elemente von der Länge Δs, berechnet für jedes Element das durchschnittliche Trägheitsmoment J des Querschnittes und hierauf die elastischen Gewichte $\Delta w_1 = \frac{x . \Delta s}{E J}$ und $\Delta w_2 = \frac{y . \Delta s}{E J}$. (Vgl. Nr. 15.) Mit diesen Gewichten zeichnet man, wie früher, drei Seilecke (Fig. 88). Die Angriffspunkte der Gewichte sind jedoch nicht die Schwerpunkte der Elemente, sondern die Antipole der beiden durch C gehenden Hauptachsen in Bezug auf die Elastizitätsellipsen der Elemente. (Vgl. Nr. 22.) Es wirken demnach

im Seileck $A_1 B_1$ die Gewichte Δw_1 in den Antipolen der y-Achse,
„ „ $A_2 B_2$ „ „ Δw_2 „ „ „ „ x- „ ,
„ „ $A_3 B_3$ „ „ Δw_2 „ „ „ „ x- „ .

Die Halbachsen der Elastizitätsellipsen sind

$$i_1 = \sqrt{1/12}\, \Delta s \quad \text{und} \quad i_2 = \sqrt{\frac{J}{F}}.$$

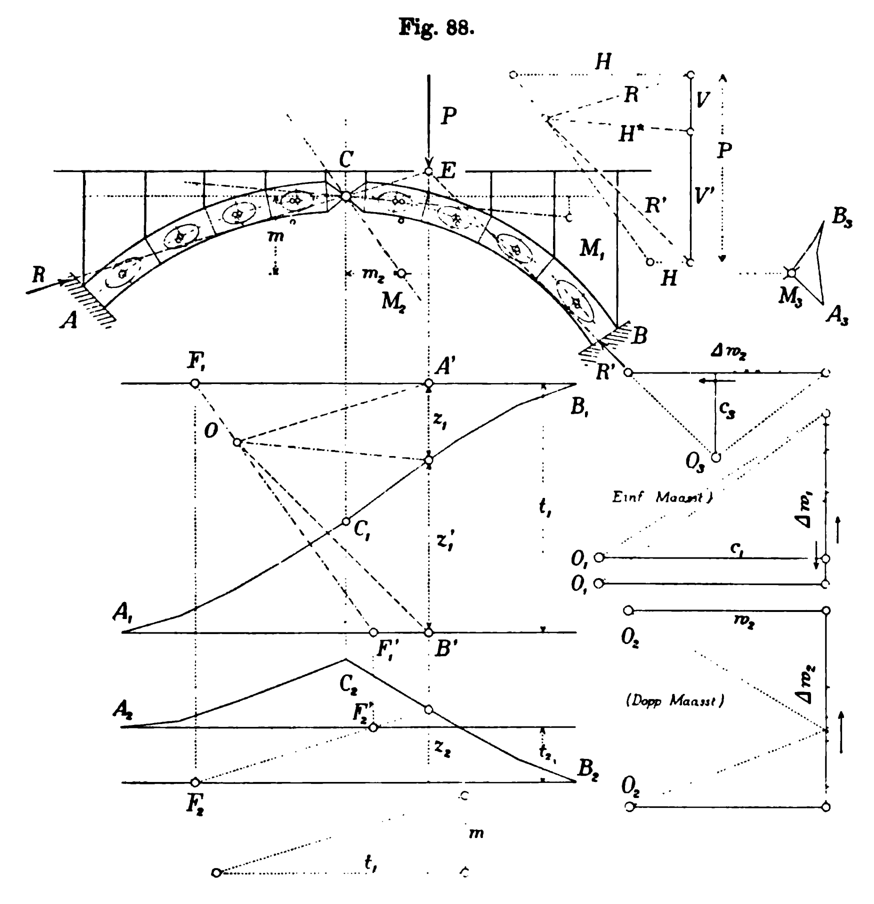
(Vgl. Nr. 15.)

Die Polweiten c_1 und c_3 sind beliebig; die Polweite des zweiten Seileckes wird gleich w_2 gemacht.

Von da an ist der Gang der Arbeit der nämliche wie in der Nr. 46. Das zweite und dritte Seileck bestimmen die Lage von M_2, dem Schwerpunkte aller Δw_2. Die Richtung von $C M_1$ wird gefunden, wenn man von C aus die Produkte $c_1 t_1$ wagrecht und $w_2 m_2$ lotrecht aufträgt. (S. 175.) Zerlegt man die Last P in ihre beiden Auflagerdrücke, zerlegt man ferner R parallel zur y-Achse und zur Linie $C M_1$, so ist die lotrechte Teilkraft $V = \frac{P z_1}{t_1}$; zerlegt man R wagrecht und parallel zu $C M_2$, so ist die wagrechte Teilkraft $H = \frac{P z_2}{m}$. Zeichnet man noch aus m und t_1 ein rechtwinkliges Dreieck und zieht durch den Endpunkt von z_2 eine

Parallele zur Hypothenuse, lotet F_2 hinauf nach F_1 und zieht durch F_1 eine Parallele zu CM_2, sowie durch den Endpunkt von z_1 eine Parallele zu CM_1, so findet man den Punkt O, der mit A' und B' ein dem Kraftdreieck ähnliches Dreieck bildet. Hiernach ist es leicht, die Drucklinie für die Last P zu zeichnen.

Fig. 88.



Wie sich die Zeichnung vereinfacht, wenn der Bogen symmetrisch gestaltet ist, braucht nicht näher erklärt zu werden. (Vgl. Fig. 82, S. 166.)

Um den Einfluss des **Eigengewichtes** zu finden, summiert man mit dem Zirkel die Ordinaten z_1 und z_2. Dann ist, wenn die Pfostenlast $P = g\,f$ ist, $V = \frac{P.\Sigma(z_1)}{t_1}$ und $H = \frac{P.\Sigma(z_2)}{m}$.

Hat man diese beiden Kräfte berechnet, so ist der linke Auflagerdruck bestimmt. (Vgl. Fig. 86, S. 177.) Der rechte ergibt sich von selbst, kann indessen zur grösseren Sicherheit aus den Ordinaten z_1' und z_2' berechnet werden. Man zeichnet nun durch Auftragen der Lasten P und der beiden Auflagerdrücke R und R' ein Dreieck und hierauf die Drucklinie.

An der Hand der Drucklinie lassen sich jetzt die im Bogen auftretenden Spannungen berechnen. Man benutzt dazu am besten die Kernformel $\sigma = \frac{R\,r}{W}$, worin R die ausserhalb des Schnittes wirkende Kraft, r ihren Hebelarm hinsichtlich des Kernpunktes und W das Widerstandsmoment des Querschnittes bedeutet. Die Grösse von R wird für jeden Schnitt dem Krafteck entnommen, der Hebelarm r in der Zeichnung abgegriffen. Die Rechnung wird je für obere und untere Kante durchgeführt; der obern Kante entspricht der untere Kernpunkt und umgekehrt.

Um zweitens den Einfluss der zufälligen Last zu erhalten, trägt man Einflusslinien für die Spannungen σ auf. Man zeichnet für jede Einzellast das Krafteck und die Drucklinie und berechnet die aus jeder Last entspringenden Spannungen mittels der Kernformel. Hierauf bildet man aus den berechneten Spannungen Einflusslinien und verwendet diese in gewohnter Weise zur Bestimmung der grössten und kleinsten Spannungen. Auch hier müssen obere und untere Kante getrennt behandelt werden.

Die Temperaturkraft bestimmt man nach Grösse und Lage wie bei Fachwerkbogen, die Temperaturspannungen werden mittels der Kernformel gefunden.

Diese etwas mühevolle Arbeit wird abgekürzt, wenn man sich des älteren Verfahrens bedient. (Nr. 49.) In diesem Falle zeichnet man die Kämpferdruck- und die Umhüllungskurven. (Nr. 42.) Dann bildet man aus den Auflagerdrücken für Einzellasten zwei Kraftecke (Fig. 90) und daran anschliessend zwei Seilecke, aus denen man die Auflagerdrücke für beliebige Lastgruppen nach Grösse und Lage ableiten kann. Hierauf ermittelt man für jeden Querschnitt die Grenzen der ungünstigsten Belastungen und zwar je für obere und untere Kante. Zu diesem Zwecke zieht man aus den Kernpunkten Tangenten an die Umhüllungskurven und schneidet damit die Kämpferdrucklinie an. Endlich setzt man jeweilen die Auflagerdrücke für die betreffenden Lastgruppen zusammen und berechnet mittels der Kernformel die grössten Spannungen.

48. Bewegungen der Widerlager.

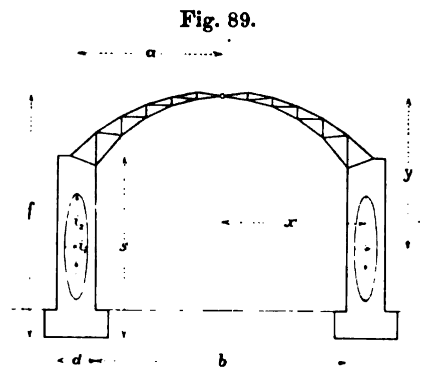
Die Widerlager können sich elastisch oder unelastisch bewegen. Im ersteren Falle ist die Bewegung dem Auflagerdruck proportional und geht wieder zurück, wenn dieser Druck nachlässt. Im zweiten Falle ist die Bewegung vom Auflagerdruck unabhängig und eine Folge anderer Ursachen, wie Setzung des Fundamentes, unrichtige Länge der Eisenkonstruktion, falsches Anziehen der Regulierungskeile u. dgl.

a) Elastische Bewegungen der Widerlager.

Beim Bogen mit einem Gelenke darf man nicht nur die wagrechte Nachgiebigkeit des Widerlagers in Betracht ziehen, wie beim Bogen mit zwei Gelenken, sondern es muss auch eine etwaige lotrechte Nachgiebigkeit, sowie eine allfällige Drehung des Widerlagers berücksichtigt werden. Am besten wendet man zur Untersuchung dieser Frage die Theorie der Elastizitätsellipse an.

Wir nehmen, um ein greifbares Beispiel zu erhalten, einen Dachstuhl an, der sich an beiden Seiten auf gemauerte Widerlager stützt. (Fig. 89.) Die Höhe der Mauer sei s, ihre Stärke d, die Entfernung der Binder voneinander b. Wir zeichnen in die Mauer die Elastizitätsellipse ein (Vgl. Teil III, S. 262.) Ihr wagrechter Halbmesser ist $i_1 = \sqrt{1/12} . d$, ihr lotrechter Halbmesser $i_2 = \sqrt{1/12} . s$. Die Ellipse deckt sich in diesem Falle mit der Trägheitsellipse der Mauerfläche.

Fig. 89.



Die Mauer besitzt ein elastisches Gewicht erster Ordnung $\Delta g = \frac{s}{E J}$. Nun berechnet man für die Mauer wie für die Bogenstäbe die Werte $\Delta w_1 = x . \Delta g$ und $\Delta w_2 = y . \Delta g$ und fügt sie als elastische Gewichte denen des eisernen Bogens bei. Zu beachten ist, dass die Angriffspunkte dieser neuen Gewichte in den Antipolen der Hauptachsen des Bogens hinsichtlich der Elastizitäts-

ellipse liegen müssen, und zwar ist für das Seileck $A_1 B_1$ der Antipol der lotrechten Achse, für die beiden andern der Antipol der wagrechten Achse massgebend. Im übrigen bleibt der Gang der Arbeit der alte. Im Grunde genommen hat man, um die Nachgiebigkeit der Widerlager zu berücksichtigen, nichts anderes zu tun, als den Bogen bis zum Erdboden hinunter fortgesetzt zu denken.

Da man es jetzt mit zweierlei Baustoffen zu tun hat, muss bei der Berechnung der Gewichte der Elastizitätsmodul berücksichtigt werden. Am einfachsten setzt man den Modul für Eisen, wie früher, gleich eins und multipliziert die Gewichte des Mauerwerkes mit dem Verhältnisse beider Moduln, wofür man je nach der Art des Mauerwerkes zwischen 10 und 20 wählen wird.

Hat die Mauer einseitigen oder beidseitigen Anlauf, so teilt man sie am besten durch wagrechte Striche in eine Anzahl Teile, die man ohne grossen Fehler als Rechtecke ansehen darf, zeichnet in jedem Teile die Elastizitätsellipse und setzt dieselben wie Trägheitsellipsen zu einer Gesamtellipse zusammen.

Stützt sich der Bogen nur auf einer Seite auf ein nachgiebiges Widerlager, so wird nur dieses in Betracht gezogen; in diesem Falle wird das Bauwerk unsymmetrisch und ist nach den Regeln der Nr. 46 zu berechnen.

Weicht der wagrechte Querschnitt der Mauer von einem Rechtecke ab, besitzt die Mauer beispielsweise Strebepfeiler, so rechnet man das Trägheitsmoment für jedes Element aus und setzt für jedes $\Delta g = \frac{s}{EJ}$ und $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ und vereinigt wiederum die einzelnen Ellipsen.

b) Unelastische Bewegungen der Widerlager.

Bewegt sich das Widerlager unelastisch, d. h. unabhängig vom Auflagerdruck, so hat man ähnlich wie bei der Berücksichtigung der Wärmeschwankungen vorzugehen. Verschiebt sich das eine Widerlager wagrecht nach aussen um die Grösse h, so entsteht im Gelenk eine wagrechte Kraft $H = \frac{h}{w_2 m}$. Verschiebt sich das Widerlager lotrecht um die Strecke v, so entsteht im Gelenk eine lotrechte Kraft $V = \frac{v}{c_1 t_1}$. Dreht sich das Widerlager um die Mitte des Auflagers und beträgt der Drehungswinkel δ, so verschiebt sich

(Fig. 89) das Gelenk der betreffenden Bogenhälfte wagrecht um $\delta . f$ und lotrecht um $\delta . a$ und man bekommt die Gelenkkräfte $H = \frac{\delta f}{w_2 m}$ und $V = \frac{\delta a}{c_1 t_1}$. Treten zwei oder drei dieser Bewegungen gleichzeitig auf, so addiert man die entsprechenden Gelenkkräfte. Ebenso werden die einzelnen Kräfte addiert, wenn beide Widerlager sich bewegen. Schliesslich bestimmt man aus den Kräften H und V eine Gesamtkraft und zeichnet einen Cremona-Plan.

49. Älteres Rechnungsverfahren.

Die Umständlichkeit, die dem Zeichnen der Einflusslinien anhaftet, macht es wünschenswert, ein rascheres Verfahren zum Berechnen der grössten und kleinsten Stabkräfte zu besitzen. Ein solches bietet sich dar, wenn man wie in der Nr. 28 den von Culmann eingeschlagenen Weg betritt. Die schöne Übersichtlichkeit, welche die Einflusslinien bieten, geht zwar bei diesem älteren Verfahren verloren, dafür lässt sich schneller damit arbeiten und die Ergebnisse sind meistens genügend genau, wenigstens für eine erste Berechnung.

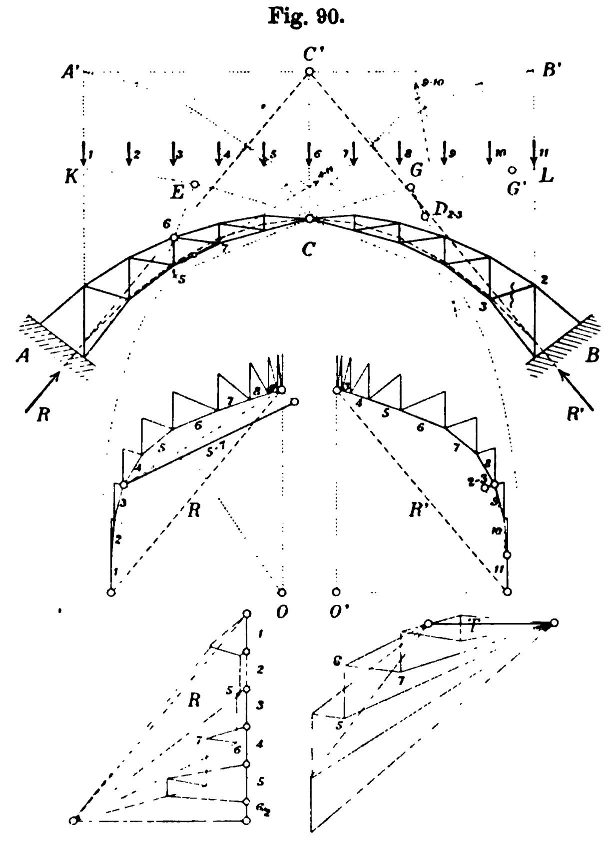
Zunächst werden auf dem in der Nr. 42 beschriebenen Wege die Kämpferdruck- und die Umhüllungskurven bestimmt (Fig. 83). Zu diesem Zwecke lässt man an jedem Fahrbahnpfosten eine Einzellast angreifen und zeichnet deren Drucklinie. Als Last wählt man die auf einen Pfosten treffende Eigengewichtslast. Sodann werden die Lasten in ihre Auflagerdrücke zerlegt und diese fortlaufend zusammengesetzt (Fig. 90). Man beginnt mit der Last 1, die keine Zerlegung erfordert. Dann fügt man die Last 2 an und zerlegt sie in in R und R' und fährt fort bis zur letzten Last. Diese Arbeit führt man sowohl für die linken wie für die rechten Auflagerdrücke durch. Die beiden Kraftecke werden bei symmetrischer Anordnung des Bogens kongruent, doch muss man sie auch in diesem Falle beide zeichnen. Verbindet man den Anfangspunkt des linken Kraftecks mit dem Endpunkte, so erhält man Grösse und Richtung des gesamten Auflagerdruckes R.

Die Lage dieser Kraft muss durch ein Seilpolygon bestimmt werden. Man wählt einen beliebigen Pol O und setzt die einzelnen Kräfte in bekannter Weise zusammen. Um etwas Linien zu sparen,

beginnt man das Seileck in C und setzt es bis A' fort. Der Schnittpunkt C' der ersten mit der letzten Seilseite ist ein Punkt der Mittelkraft. Die nämliche Arbeit wird für die rechte Seite durchgeführt, wodurch die Lage von R' gefunden wird.

Nun bildet man ein neues Kraftcck, in welchem die Auflagerdrücke R und R' und die Einzellasten P zu einem geschlossenen

Fig. 90.



Polygon vereinigt werden (Fig. 90, links unten), und zeichnet, darauf gestützt, die Drucklinie für Eigengewicht. Sie geht, wenn man richtig gearbeitet hat, durch das Scheitelgelenk. Hierauf zeichnet man nach bekannter Regel einen Cremona'schen Kräfteplan und bekommt hierdurch sämtliche Stabkräfte für Eigengewicht. Man kann diesen Kräfteplan im Gelenk beginnen und nach beiden Seiten hin fortsetzen, oder an beiden Auflagern beginnen und nach dem Scheitel hin arbeiten. In letzterem Falle müssen die ersten

Stabkräfte nach dem Schnittverfahren (Teil II, Nr. 4) bestimmt werden; im Scheitel ergibt sich eine Probe. Ist die Zahl der Stäbe gross, so empfiehlt es sich, einige der Gurtungskräfte nach dem Momentenverfahren (Teil II, Nr. 6) zu bestimmen, da sonst der Plan leicht ungenau ausfällt.

Nun folgt die Ermittlung der Stabkräfte für die zufällige Last. Soll beispielsweise der Stab 5 7 des Untergurtes (Fig. 90) berechnet werden, so zieht man durch den Drehpunkt des Stabes, also durch den Punkt 6, eine Tangente an die linke Umhüllungskurve und schneidet damit die Kämpferdrucklinie an. Der Schnittpunkt E bildet die Grenze für die ungünstigste Belastung. (Vgl. Nr. 42.) Die Lasten links von E erzeugen in dem Stabe 5 7 den grössten Zug, die Lasten rechts davon den grössten Druck. Um die grösste Druckkraft zu finden, unterspannen wir im linken Krafteck die Strecke 4 bis 11, das ist die ausserhalb des Schnittes wirkende Kraft. Ihre Lage finden wir durch Verlängerung der einschliessenden Seiten im Seileck $A' C$. Dann zerlegen wir die Kraft nach dem Schnittverfahren in zwei Teilkräfte, von denen die eine in 5 7 liegt und die andere durch 6 geht. Das Ergebnis ist stark ausgezogen und mit 5-7 bezeichnet.

Da wir die beiden Kraftecke für Eigengewichtslasten gezeichnet haben, so müssen wir die auf diesem Wege gefundene Stabkraft noch mit p zu g multiplizieren oder, was auf das nämliche herauskommt, sie auf einem Kräftemassstab abgreifen, der sich zu dem ursprünglichen verhält, wie p zu g.

Will man die kleinste Kraft im Stabe 5 7 bestimmen, so zeichnet man die Resultierende R' für die Lasten 1 bis 3 und verfährt wie oben.

In ähnlicher Weise werden die Stäbe der obern Gurtung berechnet. Auch hier ruft ein Teil der Lasten im Stabe Druck, ein anderer Zug hervor. Man bestimmt am besten den Einfluss derjenigen Lastgruppe, die durch den Schnitt, welcher den Stab trifft, nicht getrennt wird.

Für die entgegengesetzte Beanspruchung im Stab erhalten wir zwei Lastgruppen, die durch den Schnitt getrennt werden; für die linke muss man den rechtsseitigen, für die rechte den linksseitigen Auflagerdruck ermitteln und beide zusammensetzen. Dieses etwas umständliche Verfahren lässt sich jedoch umgehen. Da sich die beiden ungünstigsten Belastungen zur vollen Belastung ergänzen,

so verhält sich die Summe der Stabkräfte für zufällige Last zur Stabkraft für Eigengewicht, wie p zu g oder $S_{max} + S_{min} : S_g = p : g$, woraus folgt

$$S_{min} = \frac{p}{g} S_g - S_{max}.$$

Es genügt daher, den einen Grenzwert der Stabkraft zu bestimmen; der andere findet sich rasch und leicht mit Hilfe dieser Gleichung. Dabei muss man das Vorzeichen wohl beachten und Zugkräfte stets mit dem Plus-, Druckkräfte mit dem Minuszeichen versehen. Auch bei Stäben des Obergurtes führt diese Formel schneller zum Ziel.

Es kann auch vorkommen, dass die Belastungsgrenze verschwindet und die ungünstigste Belastung sich über die ganze Spannweite erstreckt. Dies ist der Fall, wenn der Drehpunkt des Stabes (Obergurt) innerhalb der Umhüllungskurve zu liegen kommt. Hier ist die kleinste Kraft null und die grösste einfach gleich $\frac{p}{g} S_g$.

Soll eine Strebe berechnet werden, so zieht man wiederum durch den Drehpunkt eine Tangente an die Umhüllungskurve. Für die Strebe 2 3 (rechts) ergibt sich der Grenzpunkt G. Ein zweiter Grenzpunkt G' wird durch den Querschnitt gebildet, der die betreffende Strebe trifft. Lasten zwischen G und G' beanspruchen den Stab auf Zug, Lasten links von G und rechts von G' auf Druck. Man bestimmt am besten die grösste Zugkraft nach dem gewöhnlichen Verfahren und wendet für die grösste Druckkraft obige Formel an. Erstere Kraft ist im Krafteck durch den Strich 2-3 dargestellt.

Um drittens den Einfluss der Wärmeschwankungen zu ermitteln, bestimmt man zuerst nach Nr. 45 Grösse und Richtung der Temperaturkraft T und zeichnet hierauf gestützt einen Cremonaschen Plan. (Fig. 90 rechts unten.)

Schliesslich fügt man die Kräfte für Eigengewicht, zufällige Last und Wärmeschwankung zusammen und bestimmt die maximalen und minimalen Stabkräfte.

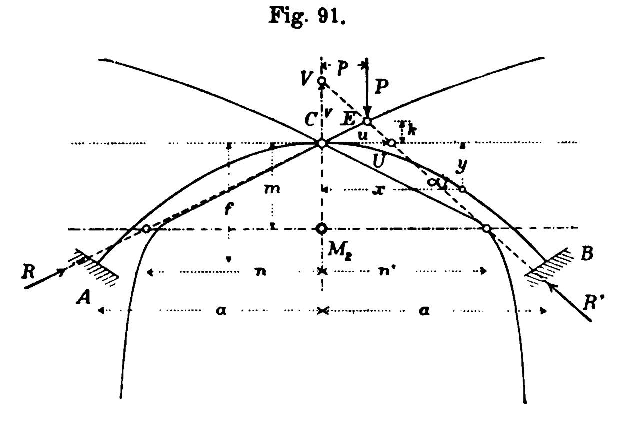
Es braucht kaum betont zu werden, dass sich das ältere Rechnungsverfahren nur für gleichförmig verteilte Belastung eignet; Eisenbahnbrücken mit ihren unregelmässigen Lastenreihen verlangen das Zeichnen von Einflusslinien.

50. Bogen mit konstantem Trägheitsmoment.

Ist das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes ganz oder nahezu konstant, so lässt sich das Zeichnen der drei Seilecke umgehen.

Wir nehmen, wie in der Nr. 32, an, es sei nicht das Trägheitsmoment J selbst, sondern der Wert $J.\cos\alpha = J\frac{dx}{ds} = J_0$ konstant; ferner habe die Bogenachse die Form einer flachen Parabel. Dann

Fig. 91.



ergeben sich für die massgebenden Punkte und Kurven verhältnismässig einfache Formeln und Gleichungen.

Auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz durch C bezogen, ist die Gleichung der Bogenachse (Fig. 91)

$$y = \frac{f x^2}{a^2}.$$

Hiernach ergeben sich die elastischen Gewichte, wenn man das Δ-Zeichen durch das d-Zeichen ersetzt,

$$dw_1 = \frac{x.ds}{EJ} = \frac{x.dx}{EJ_0}; \qquad w_1 = \int dw_1 = O.$$

$$dw_2 = \frac{y.ds}{EJ} = \frac{y.dx}{EJ_0}; \qquad w_2 = \int dw_2 = \frac{2af}{3EJ_0}.$$

Die Strecke $m = CM_2$ findet man, wenn man die Antipole der x-Achse hinsichtlich der Elastizitätsellipsen der Bogenelemente mit dw_2 belastet und den Schwerpunkt bestimmt. Die kleine Halbachse der Ellipse ist $i = \sqrt{J:F}$. Man darf genau genug i als konstant

ansehen. Ferner darf man bei flachen Bogen annehmen, die kleine Achse stehe lotrecht. Dann ist die Entfernung des Antipols vom Schwerpunkt $c = \frac{i^2}{y}$. Hiernach ergibt sich, wenn man E und J_0 gleich eins setzt, zur Berechnung von m die Beziehung

$$w_2 m = \int d w_2 \left(y + \frac{i^2}{y}\right) = 2/5\, a f^2 + 2\, a i^2,$$

$$m = 3/5\, f + \frac{3\, i^2}{f}.$$

Die Ordinate z_1 des ersten Seileckes (Fig. 82, S. 166) stellt das statische Moment der Gewichte $d w_1$ in Bezug auf die Lastlinie dar; folglich ist

$$c_1\, z_1 = \int_p^a d w_1 (x - p) = 1/6\, (2 a + p)(a - p)^2.$$

Setzt man $p = 0$, so bekommt man $c_1 \,.\, 1/2\, t_1 = 1/3\, a^3$ oder

$$t_1 = \frac{2\, a^3}{3\, c_1}.$$

Die Ordinate z_2 des zweiten Seileckes stellt das statische Moment der dw_2 dar, also

$$w_2 z_2 = \int_p^a d w_2 (x - p) = \frac{(3\, a^2 + 2\, ap + p^2)(a - p)^2 f}{12\, a^2}.$$

Nun ist (S. 167) die lotrechte Teilkraft des Auflagerdruckes R

$$V = \frac{P z_1}{t_1} = \frac{(2\, a + p)(a - p)^2}{4\, a^3} P.$$

Ferner die lotrechte Teilkraft von R'

$$V' = P - V = \frac{(2\, a - p)(a + p)^2}{4\, a^3} P$$

und der Horizontalschub

$$H = \frac{P z_2}{m} = \frac{(3\, a^2 + 2\, ap + p^2)(a - p)^2}{8\, a^3 m} P.$$

Um die Gleichung der Kämpferdrucklinie zu finden, setzen wir $p : k = H : V$, woraus folgt

$$k = \frac{2\, p\, (2\, a + p)\, m}{3\, a^2 + 2\, a p + p^2}.$$

Die Kämpferdrucklinie ist, wie man sieht, eine Kurve dritter Ordnung.

Die Drucklinie schneidet die Wagrechte durch M_2 in den Entfernungen n und n'; dann ist $n:m = p:k$, also

$$n = \frac{3a^2 + 2ap + p^2}{4a + 2p}.$$

Die Entfernung n' findet man aus der Beziehung $Pp = V'n' - Hm$,

$$n' = \frac{3a^2 - 2ap + p^2}{4a - 2p}.$$

Für	$p:a$ =	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
wird	$k:m$ =	0,000	0,131	0,256	0,374	0,485	0,588	0,683	0,773	0,855	0,930	1,000
	$n:a$ =	0,750	0,767	0,783	0,802	0,828	0,850	0,879	0,907	0,940	0,970	1,000
	$n':a$ =	0,750	0,740	0,733	0,732	0,739	0,750	0,773	0,805	0,851	0,917	1,000.

Berechnet man die Werte k, n und n', so lassen sich die Drucklinien für Einzellasten leicht zeichnen. Als Probe dient, dass sie durch den Gelenkpunkt C gehen müssen.

Was schliesslich die Umhüllungskurve betrifft, so berechnen wir die Strecke $CU = u$ aus der Beziehung $V'u = Pp$ und die Strecke $CV = v$ aus der Beziehung $Hv = Pp$. Dann ist die Gleichung der Kraft R'

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$$

oder

$$(4a - 2p)(a + p)^2 mx + (3a^2 + 2ap + p^2)(a - p)^2 y = 8a^3 pm.$$

Da diese Gleichung in Bezug auf p vom vierten Grade ist, so ist die Umhüllungslinie eine Kurve vierter Klasse. Ihre Gleichung abzuleiten stösst auf grosse Schwierigkeiten und hat demnach kaum praktischen Wert.

Den Horizontalschub für Eigengewicht findet man, wenn man (in der Gleichung für H) P durch $g \cdot dp$ ersetzt, von 0 bis a integriert und das Ergebnis verdoppelt,

$$H_g = \frac{3ga^2}{10m} = \frac{3gl^2}{40m}.$$

Da jede Drucklinie durch C gehen muss, ist hierdurch die Drucklinie für Eigengewicht bestimmt.

Ist das Trägheitsmoment des Bogens unendlich klein ($i = 0$), so wird

$$m = 3/5 f \quad \text{und} \quad H_g = \frac{ga^2}{2f} = \frac{gl^2}{8f}.$$

In diesem Falle deckt sich die Drucklinie für Eigengewicht mit der parapolischen Bogenachse. Je grösser J, desto mehr weicht die Drucklinie von der Bogenachse ab, und zwar liegt die Drucklinie stets unterhalb der Bogenachse. Die Ordinaten beider Kurven verhalten sich wie $3/5 f : 3/5 f + \frac{3 i^2}{f} = 1 : 1 + \frac{5 i^2}{f^2}$. Der lotrechte Abstand beider Kurven beträgt am Kämpfer $\frac{5 i^2}{f}$, an einer beliebigen Stelle $\frac{5 i^2}{f^2} . y$. Daraus ergibt sich das Biegungsmoment an einer beliebigen Stelle

$$M_g = H_g . \frac{5 i^2}{f^2} . y = \frac{3 g l^2 i^2}{8 f^2 m} . y .$$

Mit Hilfe der Ausdrücke für H_g und M_g lassen sich die Spannungen für Eigengewicht nach den gewöhnlichen Regeln der Festigkeitslehre berechnen. Es ist für einen beliebigen Schnitt

$$\sigma_g = \frac{H_g . \cos \alpha}{F} \pm \frac{M_g}{W},$$

wobei

$$\cos \alpha = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + 4 f^2 x^2}} .$$

Ist die Bogenachse nicht genau parabolisch, so muss die Drucklinie eingezeichnet und die Spannung nach dem Kernmoment berechnet werden.

Um die Spannungen zu berechnen, welche die zufällige Last hervorruft, zeichnet man am besten Einflussflächen und verfährt nach den früher abgeleiteten Regeln.

Die Temperaturkraft endlich wird (vgl. Nr. 45)

$$T = \frac{\alpha t l}{w_2 m} = \frac{3 \alpha t E J_0}{f m} .$$

Die Temperaturspannungen werden wieder nach der Kernformel berechnet.

Alle obigen Formeln gelten zunächst für einen vollwandigen Bogen. Sie lassen sich aber auch auf Fachwerkbogen übertragen und geben auch hier brauchbare Resultate, sobald die Bedingung $J . \cos \alpha =$ konstant annähernd erfüllt ist. Man hat in diesem Falle J durch $\frac{1}{2} F_g h^2$ und F durch $2 F_g$ zu ersetzen, worin F_g den (durchschnittlichen) Gurtungsquerschnitt und h die Bogenhöhe bezeichnet; der Trägheitshalbmesser i wird gleich $\frac{1}{2} h$.

51. Vorläufige Berechnung der Stabkräfte.

Alle bisherigen Entwicklungen setzen voraus, dass die Querschnittsmasse des zu berechnenden Bogenträgers bekannt sind, dass es sich also um ein bereits bestehendes, oder doch um ein im Entwurf vorliegendes Bauwerk handelt. Soll aber ein Bogen berechnet werden, von dem nichts bekannt ist als das Netz und die Belastungen, so muss der endgültigen Berechnung im allgemeinen eine vorläufige oder angenäherte vorangehen. Man schlägt hierzu je nach den Umständen verschiedene Wege ein.

Ist die Höhe des Trägers (die Entfernung beider Gurtungen) ganz oder nahezu konstant, so kann man die Ergebnisse der vorigen Nummer anwenden. Man berechnet auf Grund der abgeleiteten Formeln für verschiedene Einzellasten die Werte k, n und n', zeichnet die Drucklinien auf und fährt dann mit der Berechnung in der gewöhnlichen Weise fort, nur mit dem Unterschied, dass man die Berechnung der Streben ganz beiseite lässt und sich auf die Gurtungen beschränkt, weil bei der endgültigen Berechnung nur diese gebraucht werden. Man kann oft noch einen Schritt weiter gehen und, anstatt sämtliche Gurtstäbe, bloss jeden zweiten oder dritten der Rechnung unterziehen; die Querschnitte der dazwischenliegenden werden in diesem Falle durch Interpolieren bestimmt. Dieser Weg ist ebensowohl bei vollwandigen Bogenträgern zulässig, wenn die Trägerhöhe sich nur wenig oder gar nicht verändert.

Ändert sich aber die Höhe des Trägers in stärkerem Masse, so ist die Annahme eines konstanten Trägheitsmomentes zu unsicher. In diesem Falle empfiehlt es sich, sämtliche Gurtquerschnitte gleich eins zu setzen und darauf gestützt die ursprüngliche Berechnungsweise mit den drei Seilecken durchzuführen. Auch hier werden die Streben vorläufig unberücksichtigt gelassen. Ferner darf man meistens von den Gurtstäben jeden zweiten ausser acht lassen und die Querschnitte derselben durch Interpolation bestimmen, ohne einen für die Folge merklichen Fehler zu begehen. Den Elastizitätsmodul setzt man ebenfalls gleich eins.

Die einzige Schwierigkeit zeigt sich bei der Berechnung der Temperaturkraft. Während die Stabkräfte für Eigengewicht und Verkehrslast bloss vom gegenseitigen Verhältnis der Gurtquerschnitte abhängen, stützt sich die Berechnung der Temperaturkraft auf die

wirklichen Querschnittsflächen der Stäbe. Man behilft sich am einfachsten dadurch, dass man zunächst die Kraft T für $F = 1$ berechnet und dann, nachdem die Stabkräfte für Eigengewicht und Verkehrslast ermittelt sind, den durchschnittlichen Gurtungsquerschnitt F angenähert bestimmt und obige Kraft T mit F, sowie mit E multipliziert.

Die hier beschriebene Berechnungsart der Bogenträger kann selbstverständlich nicht auf volle Genauigkeit Anspruch machen, sie genügt für Vorprojekte und angenäherte Kostenvoranschläge. Handelt es sich um ein endgültiges Projekt, so müssen die Arbeiten auf Grund der vorläufig bestimmten Gurtquerschnitte wiederholt und je nach den Ergebnissen an diesen Querschnitten die nötigen Änderungen angebracht werden. Die Strebenquerschnitte braucht man erst bei dieser zweiten Berechnung zu bestimmen. (Vgl. hierüber Nr. 33.

52. Wagrechte Belastungen.

Auf den Bogen der Fig. 92 wirke im Punkte D eine wagrechte Kraft P; es sollen die Auflagerdrücke R und R' bestimmt werden Die Drucklinie, mit andern Worten der Auflagerdruck R', geht wie gewöhnlich durch das Scheitelgelenk C. Die beiden Kräfte R und R' schneiden sich auf der Richtungslinie von P.

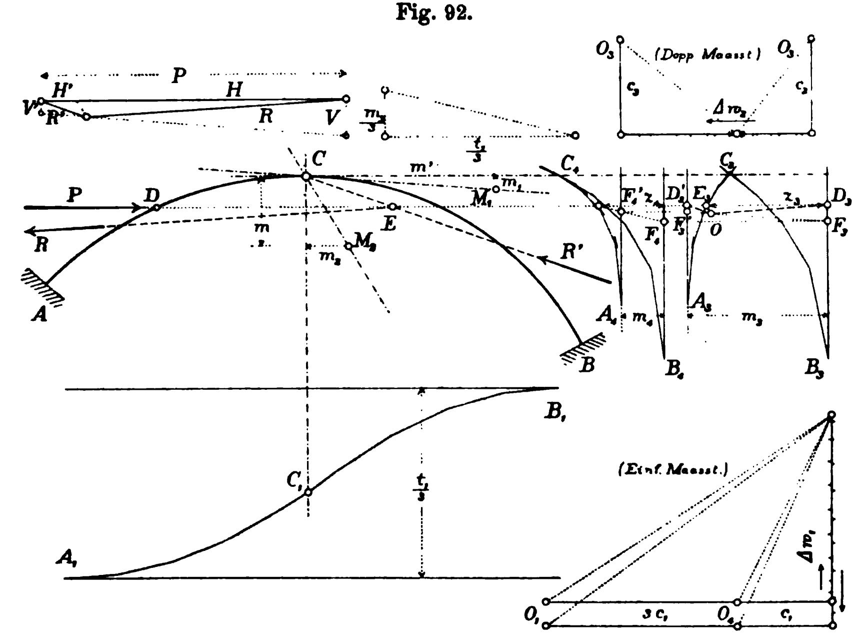
Von den drei Seilecken, die wir bei der Behandlung der lotrechten Lasten brauchten, fällt hier das zweite weg; dafür wird ein viertes nötig.

Wir berechnen, wie früher, die elastischen Gewichte $\varDelta w_1 = \frac{s\,x}{E\,F\,a^2}$ und $\varDelta w_2 = \frac{s\,y}{E\,F\,a^2}$. Im Seileck $A_1\,B_1$ wirken die $\varDelta w_1$ lotrecht, es unterscheidet sich in keiner Weise von dem früheren. Die Pole O_1 legt man so, dass die beiden Endseiten wagrecht laufen. Im Seileck $A_3\,B_3$ wirken die $\varDelta w_2$ wagrecht. Hier legt man die Pole O_3 so, dass die erste und die letzte Seite des Seileckes lotrecht stehen. Das Seileck besteht aus zwei Zweigen, die sich in C_3 spitzbogenartig vereinigen. Im vierten Seileck $A_4\,B_4$ lässt man die Gewichte $\varDelta w_1$ wagrecht wirken. Hierzu benutzt man das erste Krafteck mit den Polen O_4, hat jedoch die Seilseiten senkrecht zu den Strahlen zu ziehen. Das Seileck besteht aus zwei Zweigen, die

sich in C_4 vereinigen. (Bei symmetrischer Anordnung des Bogens decken sich die beiden Zweige.)

Mit Hilfe dieser drei Seilecke lassen sich nun die Richtungen CM_2 und CM_1 bestimmen. Die wagrechte Entfernung $A_3 B_3 = m_3$ stellt das statische Moment der Δw_2 bezogen auf die x-Achse dar, und zwar ist nach der Theorie der parallelen Kräfte $c_3 m_3 = w_2 m$, also $m = \frac{c_3 m_3}{w_2}$; macht man $c_3 = \frac{1}{2} w_2$, so wird $m = \frac{1}{2} m_3$. Ferner stellt die wagrechte Entfernung $A_4 B_4 = m_4$ das statische Moment

Fig. 92.



der Δw_1 bezogen auf die x-Achse dar, und zwar ist $c_1 m_4 = w_1 m_1$; da aber $w_1 m_1 = w_2 m_2$ ist (vgl. S. 175), so wird $m_2 = \frac{c_1 m_4}{w_2}$; macht man auch $c_1 = \frac{1}{2} w_2$, so wird $m_2 = \frac{1}{2} m_4$.

Damit sind die Koordinaten von M_2 bestimmt, und die Linie CM_2 kann gezogen werden. Die Richtung von CM_1 bekommt man, wenn man von C aus t_1 wagrecht und m_4 lotrecht aufträgt. Denn es ist $w_1 m' = c_1 t_1$ (S. 175); folglich verhält sich $m' : m_1 = t_1 : m_4$.

Denkt man sich nun den Bogenarm CB in B festgespannt und in C frei schwebend, so verschiebt sich C unter der Wirkung von P lotrecht um die Strecke $v = P \cdot c_1 \cdot z_4$ und wagrecht um die

Strecke $h = P \cdot c_3 \cdot z_3$. Diese Bewegungen muss die Kraft R rückgängig machen. Zerlegt man (Fig. 92) R in zwei Teilkräfte parallel zur y-Achse und zu CM_1, so bewirkt die zweite Teilkraft, da sie durch M_1 geht, keine lotrechte Verschiebung; folglich muss V die Verschiebung v vernichten, woraus folgt $V c_1 t_1 = v$ oder

$$V = \frac{P z_4}{t_1}.$$

Ebenso ist

$$V' = \frac{P z_4'}{t_1}.$$

Zerlegt man ferner R parallel zur x-Achse und zu CM_3, so hat die letztere Teilkraft keinen Einfluss auf die wagrechte Verschiebung; folglich muss H die Verschiebung h vernichten, woraus folgt $H w_3 m = h$ oder

$$H = \frac{P z_3}{m_3},$$

ebenso

$$H' = \frac{P z_3'}{m_3}.$$

Nun verhält sich $V : H = \frac{m_3 z_4}{t_1} : z_3$. Zeichnet man (Fig. 92) ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten m_3 und t_1 und zieht durch den Endpunkt von z_4 eine Parallele zur Hypotenuse, so wird auf der Senkrechten durch B_4 die Strecke $\frac{m_3 z_4}{t_1}$ abgeschnitten. Zieht man durch F_4 eine wagrechte Linie bis F_3, so stehen die Strecken $D_3 F_3$ und $E_3 D_3$ im gleichen Verhältnis zueinander, wie V zu H. Zieht man noch die Wagrechte $F_4' F_3'$, verbindet F_3' mit F_3 und zieht durch E_3 eine Parallele zu CM_3, so erhält man in $D_3' D_3 O$ ein dem Krafteck PRR' ähnliches Dreieck. Die Auflagerdrücke werden demnach gefunden, wenn man P parallel zu OD_3 und OD_3' zerlegt.

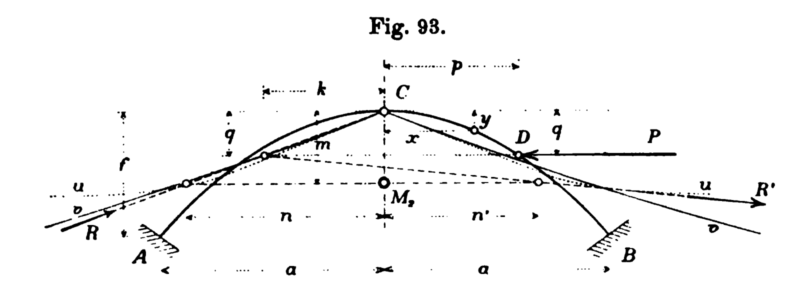
Will man die Stabkräfte kennen, die eine Einzellast P erzeugt, so zeichnet man an der Hand des Kraftecks einen Cremona'schen Kräfteplan. —

Sind mehrere Lasten P zu berücksichtigen, so berechnet man am einfachsten die Produkte $\Sigma(P z_3)$ und $\Sigma(P z_4)$ und mit Hilfe obiger Ausdrücke die Kräfte V und H, wodurch die beiden Auflagerdrücke bestimmt sind. Dann lässt sich unschwer die Drucklinie zeichnen und daran ein Cremona'scher Kräfteplan anschliessen.

Ist der Bogen symmetrisch gebaut, so lassen sich die drei Seilecke der Fig. 92 auf die Hälfte beschränken, CM_2 wird lotrecht, CM_1 wagrecht und die ganze Arbeit vereinfacht sich wesentlich.

Wagrechte Belastungen entstehen bei Eisenbahnbrücken durch das Bremsen der Bahnzüge. Da Bogen mit einem Gelenk stets einen gekrümmten Obergurt besitzen, so greift die Bremskraft bloss im Scheitel an. Im allgemeinen wird die Kraft von den beiden Knotenpunkten zunächst dem Gelenke aufgenommen, entweder von beiden gemeinschaftlich oder getrennt, d. h. von dem linken Knotenpunkte für die linke, von dem rechten für die rechte Bogenhälfte. Man hat demnach obiges Verfahren auf zwei an diesen Knotenpunkten angreifende Kräfte anzuwenden. Als Kraft wählt man die zufällige Last P (Lokomotivrad), multipliziert mit dem Reibungskoeffizienten.

Fig. 93.



Will man die Bremswirkung genau berücksichtigen, so muss man die Einflusslinie entsprechend abändern, der einzuschlagende Weg ist in der Nr. 13 eingehend beschrieben worden. Will man sich von der Wirkung der Bremsung nur einen übersichtlichen Begriff machen, so bestimmt man die Bremskraft für vollbelastete Brücke, leitet daraus die entsprechenden Auflagerdrücke ab und zeichnet einen Cremona-Plan. —

Ist das Trägheitsmoment des Bogens ganz oder nahezu konstant, und ist die Bogenachse eine Parabel, so lassen sich (Fig. 93) die drei Längen n, n' und k bequemer durch Formeln finden.

Es ist nach früher (Nr. 50) $q = \frac{f p^2}{a^2}$, $dw_1 = \frac{x\,dx}{EJ_0}$, $dw_2 = \frac{y\,dx}{EJ_0}$,

$$w_2 = \frac{2\,a f}{3\,E J_0};\ t_1 = \frac{2\,a^3}{3\,c_1}\ ;\ m = 3/5\,f + \frac{3\,i^2}{f}\ .$$

Wir vereinfachen die weitere Rechnung, indem wir den Trägheits-

halbmesser $i = 0$ setzen. Dann wird $m = 3/5\, f$. Ferner ergibt sich (wenn man $EJ_0 = 1$ setzt)

$$c_3 z_3 = \int_p^a d\,w_2 (y - q) = \frac{(3\,a^5 - 5\,a^3 p^2 + 2\,p^5) f^2}{15\,a^4},$$

$$c_1 z_4 = \int_p^a d\,w_1 (y - q) = \frac{(a^4 - 2\,a^2 p^2 + p^4) f}{4\,a^2}.$$

Nun verhält sich $n : m = H : V = \frac{P z_3}{m} : \frac{P z_4}{t_1}$, woraus folgt

$$n = \frac{4\,(3\,a^3 + 6\,a^2 p + 4\,a p^2 + 2\,p^3)}{15\,(a + p)^2}.$$

Wenn man $+p$ durch $-p$ ersetzt, findet man

$$n' = \frac{4\,(3\,a^3 - 6\,a^2 p + 4\,a p^2 - 2\,p^3)}{15\,(a - p)^2}.$$

Endlich ist $k : q = n : m$, folglich

$$k = \frac{4\,p^2 (3\,a^3 + 6\,a^2 p + 4\,a p^2 + 2\,p^3)}{9\,a^2 (a + p)^2}.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung p durch $a\sqrt{q : f}$, so bekommt man die Gleichung der Kämpferdrucklinie; sie ist vom fünften Grade. Auch die Linie, welche die Kraft R' umhüllt, ist von der fünften Klasse.

Für $p : a = 0{,}0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
wird $n : a = 0{,}80$	0,80	0,81	0,82	0,84	0,86	0,88	0,91	0,94	0,97	1,00
$n' : a = 0{,}80$	0,80	0,81	0,82	0,84	0,81	0,68	0,21	−1,73	−16,5	$-\infty$
$k : a = 0{,}00$	0,01	0,05	0,12	0,22	0,36	0,53	0,74	1,00	1,31	1,67

53. Schiefe Belastungen.

Ist die den Bogen belastende Kraft schief gerichtet, so kann man sie in eine lotrechte und eine wagrechte Teilkraft zerlegen, nach dem vorangegangenen deren Auflagerdrücke einzeln bestimmen und diese hierauf wieder zusammensetzen. Dieser Weg ist auch am Platze, wenn mehrere Lasten von verschiedener Richtung auf den Bogen einwirken, wie z. B. wenn Dachstühle mit gekrümmter Dachfläche auf Winddruck berechnet werden. Sind jedoch mehrere Lasten von gleicher Richtung vorhanden, so ist es bequemer, einen andern Weg einzuschlagen. Er besteht darin, dass man den Bogen

in der Zeichnungsebene so weit dreht, dass die Lasten lotrecht zu stehen kommen, und hierauf das Verfahren der Nr. 46 anwendet, oder auch, wenn die Lasten flach gerichtet sind, den Bogen so weit dreht, bis die Lasten in wagrechter Richtung wirken, worauf das Verfahren der vorigen Nummer Platz zu greifen hat.

Nach diesem Vorgange lässt sich unter anderm der Einfluss des Windes auf einen Dachstuhl mit ebener Dachfläche berechnen. Die Aufgabe ist einfach und verursacht, abgesehen davon, dass der gedrehte Bogen stets unsymmetrisch wird, keine Schwierigkeiten.

Viertes Kapitel.

Bogen ohne Gelenke.

54. Die Elastizitätsellipse eines Bogenträgers.

Die statische Berechnung eines gelenklosen Bogens beginnt man am besten damit, dass man seine Elastizitätsellipse zeichnet. (Über das Wesen und die Bedeutung dieser Ellipse vgl. Teil II, S. 117 u. S. 169 und Teil III, S. 259.) Nicht nur bilden die Zeichnungen, deren man zur Bestimmung der Ellastizitätsellipse bedarf, die Hilfsmittel zur Ermittlung der Auflagerdrücke für Einzellasten, sondern die Eigenschaften dieser Kurve verleihen auch der ganzen Theorie des gelenklosen Bogens grössere Anschaulichkeit.

Man berechnet für jeden Stab des Bogens das elastische Gewicht erster Ordnung

$$\Delta g = \frac{s}{E F a^2}.$$

Hierin bedeutet s die Länge des Stabes, F seine Querschnittsfläche und a seinen Abstand vom Drehpunkte. Den Elastizitätsmodul setzt man in der Regel gleich eins; er ist bedeutungslos, so lange es sich bloss um den Einfluss der Belastungen handelt und gewinnt erst bei den Wirkungen der Wärmeschwankungen und etwaiger Bewegungen der Widerlager Bedeutung.

Um die elastischen Gewichte zu berechnen, schreibt man die Werte s, a und F in Tabellenform auf, erstere in Metern, die letzteren in cm^2, berechnet zuerst (mit dem Rechenschieber) den Nenner $F a^2$ und hierauf (mit einer zweiten Schieberstellung) den Wert Δg. Hierbei beschränkt man sich in der Regel auf die Gurtungsstäbe, da die Streben nachgewiesenermassen auf die Schlussergebnisse nur geringen Einfluss ausüben. (Vgl. Nr. 39.) Die Summe aller Δg bezeichnen wir mit g.

Die Werte Δg betrachtet man nun als Kräfte, die in den Drehpunkten der betreffenden Stäbe angreifen und zeichnet dazu fünf Seilecke, gerade so, als ob es sich darum handelte, die Trägheitsellipse einer geschlossenen Figur zu bestimmen.

Im ersten Seileck lässt man die Kräfte Δg lotrecht, im zweiten wagrecht wirken. Diese zwei Seilecke bestimmen den Schwerpunkt der Gewichte Δg und liefern zugleich die statischen Momente derselben bezogen auf die Schwerpunktsachsen. In den beiden folgenden Seilecken lässt man die statischen Momente als Kräfte wirken, sie ergeben die Trägheitsmomente der Δg. Mit dem fünften Seilecke endlich werden die Zentrifugalmomente der elastischen Gewichte bestimmt; in diesem lässt man die statischen Momente der wagrecht wirkenden Δg in lotrechter Richtung angreifen. Diese fünf Seilecke sind im allgemeinen für die Bestimmung der Elastizitätsellipse notwendig und ausreichend.

Die Fig. 94 erläutert den Gang der Arbeit näher, und zwar zunächst für einen symmetrischen Bogenträger; wie sich das Verfahren ändert, wenn der Bogen unsymmetrisch ist, soll später (Nr. 62) gezeigt werden.

Das Krafteck für die Gewichte Δg ist rechts gezeichnet. Der Massstab, in welchem die Gewichte aufgetragen werden, ist beliebig. Den Pol O_1 nehmen wir der Mitte des Kraftecks gegenüber an und machen die Polweite gleich g, gleich der Summe aller Δg. Mit dem Pole O_1 zeichnen wir hierauf das erste Seileck $A_1 B_1$; seine Endseiten schneiden sich in S_1 auf der lotrechten Schwerlinie. Infolge der symmetrischen Form des Bogens teilt die Schwerlinie den Bogen in zwei gleiche Hälften.

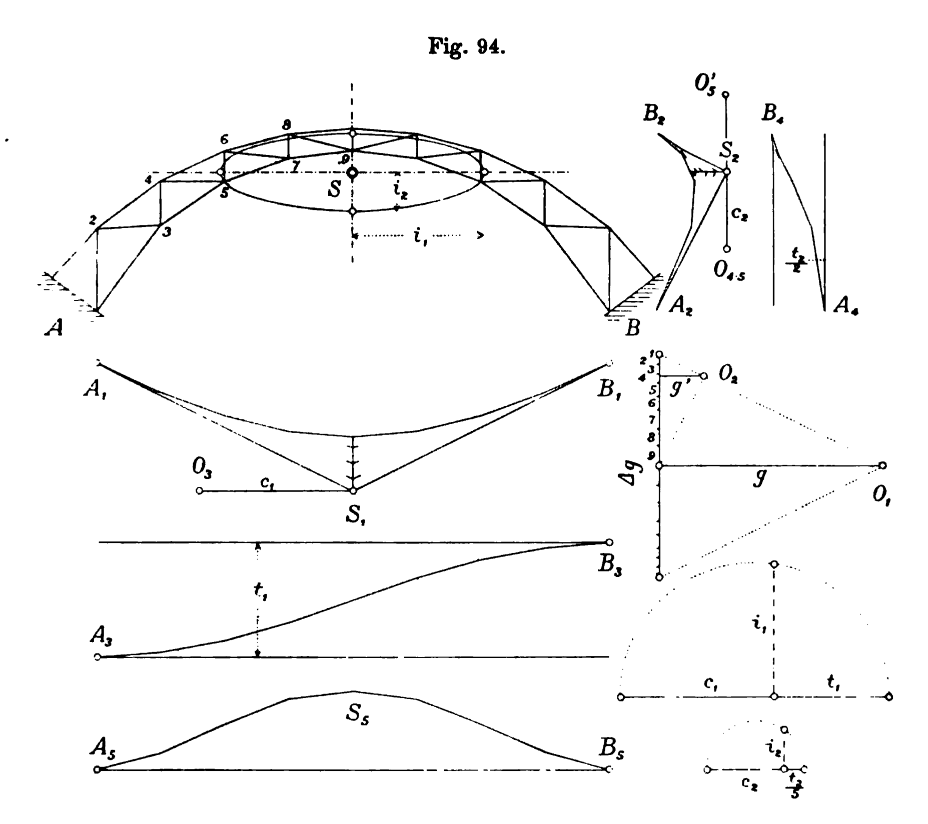
Durch das zweite Seileck $A_2 B_2$ bestimmen wir die wagrechte Schwerlinie. Hier lassen wir die Gewichte Δg wagrecht wirken. Der Symmetrie wegen genügt es, dieses Seileck bloss zur Hälfte zu zeichnen. Die Seilseiten laufen senkrecht zu den Strahlen aus O_2.

Der Schnittpunkt der beiden Endseiten bestimmt die Lage der wagrechten Schwerlinie und den Schwerpunkt S sämtlicher Gewichte.

Die lotrechte und die wagrechte Schwerlinie wollen wir die Hauptachsen des Bogens nennen; die Koordinaten der Knotenpunkte bezeichnen wir mit x und y.

Um die drei folgenden Seilecke zu zeichnen, verlängern wir in den beiden ersten Seilecken sämtliche Seiten bis zu ihren Schnitt-

Fig. 94.



punkten mit den Hauptachsen und bekommen damit nach der Theorie der parallelen Kräfte die statischen Momente der elastischen Gewichte bezogen auf diese Achsen. Die Abschnitte im ersten Seileck stellen die Werte $\Delta g . x$, die Abschnitte im zweiten die Werte $\Delta g . y$ dar.

Das dritte Seileck $A_3 B_3$ wird mit dem Pole O_3 gezeichnet, es bekommt die bekannte **S**-Form. Die Polweite c_1 wird beliebig angenommen. Die lotrechte Entfernung der beiden Endseiten des

dritten Seilecks stellt jetzt das Trägheitsmoment der Δg bezogen auf die lotrechte Hauptachse dar, und zwar ist dieses Trägheitsmoment gleich t_1 mal den Polweiten, mit denen das erste und das dritte Seileck gezeichnet wurden; demnach ist

$$J_1 = \Sigma(\Delta g \,.\, x^2) = g \,.\, c_1 \,.\, t_1 \,.$$

In gleicher Weise betrachtet man die Abschnitte des zweiten Seilecks als Kräfte und lässt sie in den Drehpunkten der Stäbe wagrecht wirken. Der Abstand des Poles O_4 ist auch hier beliebig. Hieraus ergibt sich das vierte Seileck $A_4 B_4$. Den wagrechten Abstand der beiden Endseiten bezeichnen wir, da das zweite Seileck bloss mit der Hälfte der Gewichte gezeichnet worden, mit $\frac{1}{2} t_2$. Das Trägheitsmoment für die lotrechte Achse ist jetzt wie oben

$$J_2 = \Sigma(\Delta g \,.\, y^2) = g' \,.\, c_2 \,.\, t_2 \,.$$

Das fünfte Seileck endlich liefert die Zentrifugalmomente, also die Werte $\Delta g \,.\, x \,.\, y$. Wir betrachten die Abschnitte des zweiten Seilecks (also die statischen Momente $\Delta g \,.\, y$) als Kräfte, lassen sie aber jetzt in lotrechter Richtung wirken. Die Seiten des fünften Seilecks stehen somit von A_5 bis S_5 senkrecht zu den Strahlen aus O_5. Die zweite Hälfte des Seilecks erhält man durch wagrechte Übertragung oder auch, indem man das Seileck von S_5 aus mit O_5' als Pol fortsetzt. Der Symmetrie wegen gelangen die erste und letzte Seite des fünften Seilecks zur Deckung.

Bezeichnet man die Halbachsen der Elastizitätsellipse mit i_1 und i_2, so ist nach bekannter Regel $J_1 = g \,.\, i_1^2$ und $J_2 = g \,.\, i_2^2$, woraus folgt

$$i_1 = \sqrt{c_1 \, t_1} \qquad \text{und} \qquad i_2 = \sqrt{\frac{g' \, c_2 \, t_2}{g}} \,.$$

Es empfiehlt sich im Interesse der grössern Genauigkeit, g' kleiner als g zu wählen und zwar so, dass das Verhältnis beider Polweiten eine ganze Zahl ist. Macht man beispielsweise $g' = 1/5\, g$, so wird $i_2 = \sqrt{1/5 \, c_2 \, t_2}$.

Die beiden i werden durch zwei Halbkreise bestimmt, welche die Strecken c_1 und t_1, bezw. c_2 und $1/5\, t_2$ überspannen. (Fig. 94.) An der Hand der beiden i lässt sich schliesslich die Elastizitätsellipse leicht zeichnen. —

Wenn es sich bloss um das Zeichnen der Elastizitätsellipse handelte, so könnte man bei symmetrischer Bogenform das fünfte Seileck entbehren, man braucht es jedoch in der Folge zur Be-

stimmung der Auflagerdrücke. Aus demselben Grunde zeichnet man die Seilecke 1, 3 und 5 ganz, während man sich sonst auf die Hälfte beschränken könnte.

Dringend zu empfehlen ist es, das zweite und fünfte Seileck so genau als möglich zu zeichnen, weil die Grösse des Horizontalschubs davon abhängt. Bei Bogen mit geringer Pfeilhöhe ist es stets ratsam, die Abschnitte des zweiten Seilecks, nachdem die Schwerlinie bestimmt ist, auch durch Zahlenrechnung zu ermitteln, und sie hierauf in grösserem Massstab aufzutragen; nur so gelingt es, das fünfte Seileck mit genügender Genauigkeit zu zeichnen.

Es sei noch auf folgendes aufmerksam gemacht:

In der Fig. 94 ist S der Schwerpunkt der Gewichte erster Ordnung und zugleich der Mittelpunkt der Elastizitätsellipse. Der Punkt, den wir in den Figuren des zweiten Kapitels mit M bezeichnet haben, ist dagegen der Schwerpunkt der Gewichte zweiter Ordnung. Da nun $\Delta w = \Delta g \cdot y$ ist, so ist M der Schwerpunkt der statischen Momente der Gewichte Δg oder, nach der Theorie der Trägheitsellipse, der Antipol der Bogensehne AB hinsichtlich der Elastizitätsellipse. Ebenso ist der Punkt M in den Figuren des dritten Kapitels der Antipol der Wagrechten durch das Scheitelgelenk bezogen auf die Elastizitätsellipse. Die Punkte S und M haben daher wesentlich verschiedene Bedeutung.

Beim zweigelenkigen Bogen bildet die Bogensehne die Hauptachse, beim eingelenkigen die Wagrechte durch das Scheitelgelenk, beim gelenklosen dagegen die Wagrechte durch den Punkt S. Da letzterer nicht von vornherein bekannt ist, so sind wir genötigt, zuerst zwei Seilecke mit den Gewichten Δg zu zeichnen, während bei den beiden andern Bogenformen sofort mit den Gewichten Δw gearbeitet werden kann.

55. Auflagerdrücke für Einzellasten.

An der Hand der fünf Seilpolygone der Fig. 94 lassen sich jetzt leicht die Auflagerdrücke für Einzellasten bestimmen.

R und R' (Fig. 95) seien die Auflagerdrücke für die Last P. Wir ersetzen zunächst R durch eine gleichgrosse und parallele, aber durch S gehende Kraft und ein statisches Moment (ein Kräftepaar) $M = R \cdot r$, worin r den Abstand der Kraft R vom Punkte S bedeutet. Ferner zerlegen wir die durch S gehende Kraft R in eine lotrechte und eine wagrechte Teilkraft, erstere sei V, letztere H. Durch die drei Komponenten M, V und H ist R vollständig bestimmt.

Es lässt sich nun zeigen, dass die drei Seilecke 1, 3 und 5 zusammen mit ihren Endseiten die Einflussflächen für die drei

Einzelkräfte darstellen, und zwar ist, wenn man (Fig. 95) die Ordinaten dieser drei Seilecke mit z, z_1 und z_2 bezeichnet,

$$M = P.z,$$
$$V = \frac{P.z_1}{t_1},$$
$$H = \frac{P.z_2}{t_2}.$$

Zum Beweise benutzen wir den im Nachtrag zum III. Teil abgeleiteten Satz: Um die Einflusslinie für eine gesuchte Kraft zu erhalten, lässt man diese Kraft auf den Träger einwirken und bestimmt die entsprechende Durchbiegungslinie desselben. Bei dieser Formänderung ist die virtuelle Arbeit der gesuchten Kraft gleich derjenigen der Last P. Um die Durchbiegungskurve für eine beliebige Belastung zu erhalten, betrachtet man die Formänderungswinkel als Kräfte und zeichnet dazu ein Seileck. (Vgl. Teil II, S. 110.)

Lässt man nun zunächst das Moment M auf den Bogen einwirken, so sind die Formänderungswinkel für die einzelnen Stäbe $\Delta\delta = M.\Delta g$ (Nr. 15) und die virtuellen Arbeiten gleich $M^2.\Delta g$. Die Gesamtarbeit ist demnach gleich $M^2.g$. Die Durchbiegungen, die unter der Wirkung von M entstehen, werden durch das erste Seileck dargestellt, denn in diesem wirken die Δg als Kräfte. Hält man das rechte Bogenende fest, so ist die Durchbiegung unter der Last P gleich $M.g.z$, folglich die Arbeit der Last gleich $P.M.g.z$. Setzt man beide Arbeiten einander gleich, so folgt $M = P.z$.

Lässt man zweitens die Kraft V auf den Bogen einwirken, so sind die Formänderungswinkel $\Delta\delta = V.x.\Delta g$ und die virtuellen Arbeiten gleich $V^2.x^2.\Delta g$, gleich V^2 mal dem Trägheitsmomente der elastischen Gewichte. Letzteres ist für den ganzen Bogen nach früher gleich $g.c_1.t_1$; folglich die Gesamtarbeit gleich $V^2.g.c_1.t_1$. Die Durchbiegungslinie für die Kraft V wird durch das dritte Seileck dargestellt, denn in diesem wirken die Werte $x.\Delta g$ als Kräfte, und zwar ist die Durchbiegung, wenn man wieder das rechte Bogenende festhält, gleich $V.g.c_1.z_1$, also die Arbeit gleich $P.V.g.c_1.z_1$, woraus folgt $V = \frac{P.z_1}{t_1}$.

Nach derselben Betrachtungsweise gelangt man zu der dritten der obigen Gleichungen, nämlich $H = \frac{P.z_2}{t_2}$.

Vertauscht man links mit rechts, also je die letzte Seilseite mit der ersten, so erhält man in gleicher Weise die Komponenten des rechtsseitigen Auflagerdrucks R'. Es ist

$$M' = P \, . \, z' \, ,$$

$$V' = \frac{P \, . \, z_1'}{t_1} \, ,$$

$$H' = \frac{P \, . \, z_2'}{t_2} \, .$$

Zu den nämlichen Ergebnissen gelangt man auf Grund folgender Erwägungen.

Denkt man sich den Bogen am rechten Ende eingespannt, am linken frei schwebend, und legt man eine einzelne Last P auf, so erleidet das linke Bogenende eine elastische Verschiebung und zugleich eine Drehung. Diese Bewegungen muss der Auflagerdruck R wieder rückgängig machen.

Diese Sachlage wird nicht geändert, wenn man mit dem linken Bogenende einen beliebigen andern Punkt durch einen unelastischen Stab verbunden denkt. Denn wenn das Bogenende wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehren muss, so ist dasselbe mit diesem Punkt der Fall; und umgekehrt: Wird die Kraft R derart bestimmt, dass dieser Punkt in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so gelangt auch das linke Bogenende an seine alte Stelle.

Wir denken uns nun das linke Bogenende mit dem Punkte S, dem Schwerpunkt der Gewichte Δg verbunden und fragen, wie sich dieser Punkt elastisch bewegt, wenn die Last P zur Wirkung gelangt. Dabei unterscheiden wir eine Drehung δ, eine lotrechte Verschiebung v und eine wagrechte Verschiebung h.

Der Drehungswinkel ist nach der Theorie der elastischen Gewichte gleich der Kraft P mal dem statischen Momente der Δg bezogen auf die Kraftrichtung. (S. 56.) Dabei fallen nur die Gewichte rechts von P in Betracht, weil nur sie von der Last beeinflusst werden, wenn das rechte Bogenende eingespannt ist. Im ersten Seileck haben wir die Δg zusammengesetzt; der Abschnitt z (Fig. 95) stellt somit das gesuchte statische Moment dar; es ist

$$\delta = P \, . \, g \, . \, z \, .$$

Die lotrechte Verschiebung des Punktes S ist nach der Theorie der elastischen Gewichte gleich P mal dem Zentrifugalmomente der Gewichte bezogen auf die Kraft- und die Verschiebungsrichtung.

(S. 56.) Die Verschiebungsrichtung ist hier die y-Achse. Im ersten Seileck werden die Gewichte mit ihren Abszissen multipliziert, die Abschnitte dieses Seilecks auf der y-Achse sind daher die statischen Momente der Δg. Diese werden im dritten Seileck wieder zusammengesetzt, die Abschnitte auf der Richtung der Last P stellen daher die gesuchten Zentrifugalmomente dar. Es ist somit

$$v = P \cdot g \cdot c_1 \cdot z_1 \, .$$

Drittens findet man die wagrechte Verschiebung des Punktes S, wenn man das Zentrifugalmoment der Δg bezogen auf die Kraftrichtung und die x-Achse bestimmt. Das zweite Seileck liefert uns die statischen Momente bezogen auf die x-Achse und das fünfte, in welchem diese Momente als lotrechte Kräfte wirken, das gesuchte Zentrifugalmoment. Es ist somit

$$h = P \cdot g' \cdot c_2 \cdot z_2 \, .$$

Nun soll der Auflagerdruck R so bestimmt werden, dass er die nämlichen Bewegungen nur mit entgegengesetztem Zeichen bewirkt.

Wir zerlegen wie oben R in die drei Komponenten M, V und H. Nach der Theorie der Elastizitätsellipse dreht jede dieser Kräfte das Bogenende um den Antipol der Kraftrichtung bezogen auf die Elastizitätsellipse. Dasselbe gilt von dem mit dem Bogenende verbundenen Punkte S. Das Moment M als unendlich ferne Kraft dreht somit um den Punkt S, die Kraft V um den unendlich fernen Punkt der x-Achse und die Kraft H um den unendlich fernen Punkt der y-Achse. Unter der Wirkung von M erleidet daher der Punkt S eine Drehung, aber keine Verschiebung, unter der Wirkung von V eine Verschiebung längs der y-Achse, aber keine Drehung, und unter der Wirkung von H eine Verschiebung längs der x-Achse, aber ebenfalls ohne Drehung. Wir sehen hieraus, dass M die Drehung δ, V die Verschiebung v und H die Verschiebung h vernichten muss. Daraus folgt

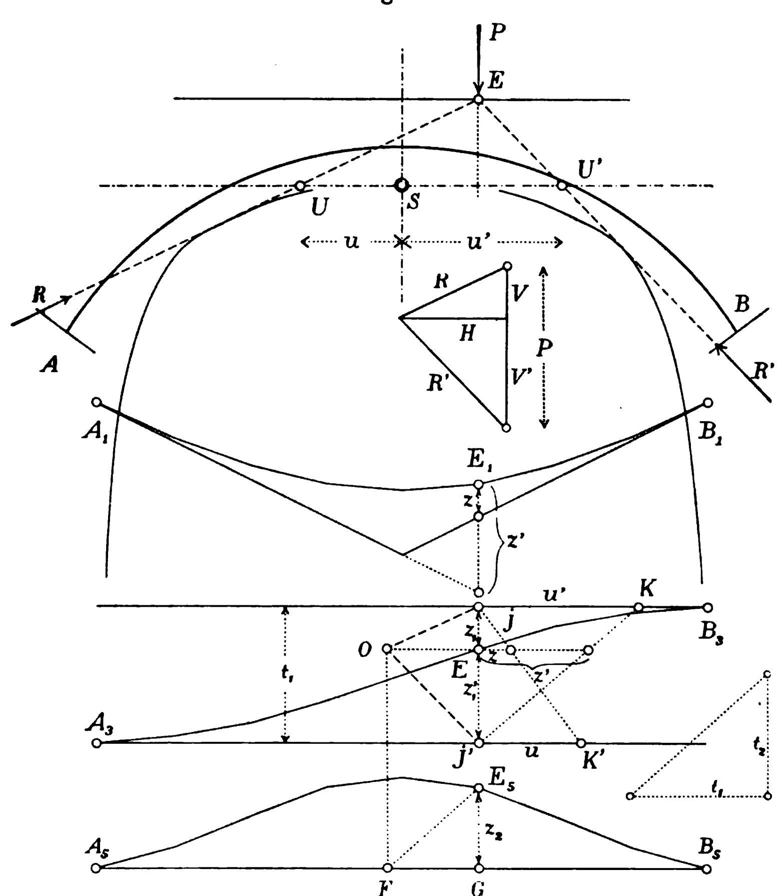
$$\begin{aligned} \delta &= M \cdot g \, , \\ v &= V \cdot g \cdot i_1^2 \, , \\ h &= H \cdot g \cdot i_2^2 \, . \end{aligned}$$

Denn der Drehungswinkel ist gleich dem statischen Momente der wirkenden Kraft in Bezug auf S mal der Gewichtssumme, die vertikale Verschiebung ist, da Kraft- und Verschiebungsrichtung zusammenfallen, gleich der Kraft V mal dem Trägheitsmomente sämtlicher Gewichte bezogen auf die y-Achse und die horizontale

Verschiebung gleich der Kraft H mal dem Trägheitsmomente bezogen auf die x-Achse.

Setzt man endlich die Ausdrücke für δ, v und h einander gleich und berücksichtigt, dass $i_1{}^2 = c_1 t_1$ und $i_2{}^2 = \frac{g' c_2 t_2}{g}$, so ergeben sich für M, V und H obige Ausdrücke.

Fig. 95.



Hiermit sind die Elemente der Kraft R bestimmt; um die Kraft selbst zu finden, verfahren wir wie folgt:

Zunächst verhält sich $V : H = z_1 : \frac{z_2 t_1}{t_2}$. Bildet man daher aus t_1 und t_2 ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 95 unten) und zieht durch den Endpunkt von z_2 eine Parallele zur Hypotenuse, so wird

$FG = \frac{z_2 t_1}{t_2}$ abgeschnitten. Lotet man F hinauf nach O und verbindet O mit J, so ist OJ die Richtung von R. Ebenso ist OJ' die Richtung von R'.

Die Kraft R schneide die x-Achse in U. Denkt man sich R in U lotrecht und wagrecht zerlegt, so ist $V.u = M$ oder

$$u = \frac{z t_1}{z_1}.$$

Trägt man von E_3 aus die Strecke z wagrecht auf und verbindet deren Endpunkt mit J, so schneidet die Verbindungslinie die Strecke $J'K' = u$ ab; trägt man diese von S aus wagrecht auf, so ist auch die Lage von R gefunden.

In derselben Weise findet man, wenn man $J'K$ zieht und JK von S aus nach rechts aufträgt, einen Punkt der Kraft R'.

Auf Grund des Dreiecks OJJ' und der Punkte U und U' lässt sich schliesslich die Drucklinie für die Last P leicht zeichnen.

Bei flachen Bogen empfiehlt es sich, um grössere Genauigkeit zu erzielen, die Abschnitte im ersten und zweiten Seileck nicht nur durch Zeichnung, sondern auch durch Zahlenrechnung zu bestimmen; namentlich gilt dies von den in der Regel kleinen Abschnitten des zweiten Seilecks.

Besonders leicht wird die Bestimmung der Kraft R für die letzte Last rechts ungenau, weil hier alle drei z sehr klein sind. Man kann diesen Übelstand auf zweierlei Arten beseitigen. Entweder zeichnet man die letzten Strecken der drei Seilecke zehnfach vergrössert auf, oder man bestimmt für das letzte Bogenstück die Elastizitätsellipse nach dem in der vorigen Nummer beschriebenen Verfahren und bestimmt den Antipol D der Last hinsichtlich dieser Ellipse, dann liegt die Kraft R in der Antipolaren von D hinsichtlich der Gesamtellipse. Hält man nämlich das rechte Bogenende fest, so dreht sich das linke Ende unter der Wirkung von P um den Punkt D; soll diese Bewegung verschwinden, so muss R hinsichtlich der ganzen Ellipse denselben Drehpunkt haben, also in der Antipolaren von D liegen.

Übrigens braucht man in Bezug auf den Auflagerdruck für die letzte Last nicht allzu ängstlich zu sein, weil derselbe stets klein ist und eine etwaige ungenaue Lage für die späteren Ergebnisse meistens wenig zu bedeuten hat.

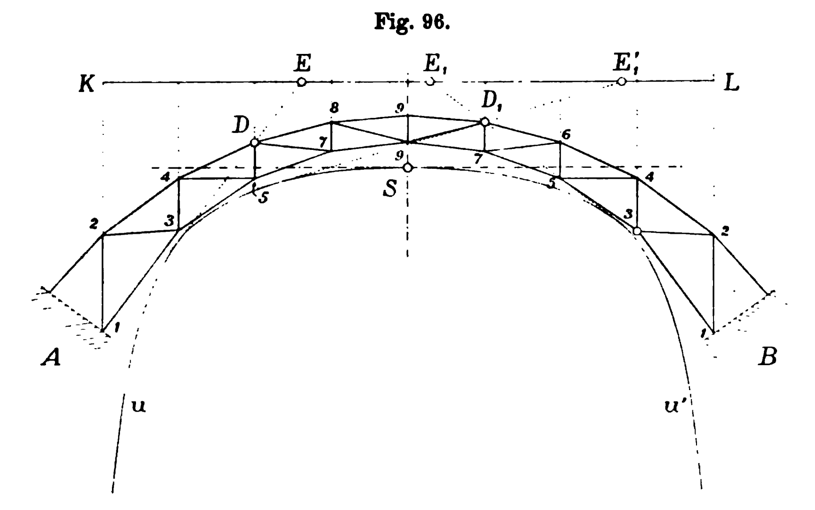
56. Kämpferdruck- und Umhüllungslinien; ungünstigste Belastungen.

Wandert die Last P von einem Auflager zum andern über die ganze Spannweite, so beschreibt der Schnittpunkt E beider Auflagerdrücke eine krumme Linie KL, die „Kämpferdrucklinie“, und die

Auflagerdrücke bilden Tangenten an zwei krumme Linien u und u', die „Umhüllungslinien“. Um diese Kurven zu finden, braucht man nur die durch die Fig. 95 dargestellte Zeichnung für sämtliche Laststellungen zu wiederholen, die Punkte E durch eine stetige Kurve zu verbinden und in die Strahlenbüschel der beiden Auflagerdrücke zwei Kurven einzuzeichnen.

In der Fig. 96 sind die Kämpferdruck- und Umhüllungslinien dargestellt. Sind diese Linien bekannt, so lassen sich die Auflagerdrücke für beliebige Lasten mit grosser Leichtigkeit zeichnen. Ferner kann man mit ihrer Hilfe leicht die Grenzen der ungünstigsten Belastungen bestimmen. Man hat zu diesem Zwecke nichts anderes

Fig. 96.



zu tun, als durch den Drehpunkt des betreffenden Stabes eine Tangente an die Umhüllungskurve zu legen und damit die Kämpferdrucklinie anzuschneiden.

Der Drehpunkt des Untergurtstabes 5 7 z. B. liegt in D; eine Berührungslinie durch D an die Kurve u schneidet die Kämpferdrucklinie in E. Nun sieht man leicht, dass Lasten links von E den genannten Stab auf Zug, Lasten rechts davon auf Druck beanspruchen. Denn für jene liegt die Drucklinie (und damit auch die ausserhalb wirkende Kraft) oberhalb, für diese unterhalb D; in dem einen Fall wird der Stab gezogen, im andern gedrückt.

Der Drehpunkt des Untergurtstabes 9 7 liegt in D_1; von hier aus können zwei Tangenten gezogen werden, welche die Kämpferdrucklinie schneiden, die eine an die linke, die andere an die rechte

Umhüllungskurve. Wir erhalten somit hier zwei Grenzpunkte E_1 und E_1'. Lasten links von E_1 sowie solche rechts von E_1' erzeugen im genannten Stabe Druck, Last zwischen E_1 und E_1' Zug.

Es kann auch vorkommen, dass von einem Drehpunkte aus sich zwei Berührungslinien an die gleiche Umhüllungskurve ziehen lassen, die beide die Kämpferdrucklinie schneiden; der Obergurtstab 2 4 bildet hierfür ein Beispiel. Umgekehrt gibt es Drehpunkte, von denen aus gar keine Berührungslinie möglich ist. Dies ist der Fall, wenn der Drehpunkt innerhalb der Umhüllungskurve liegt; für solche Stäbe ist dann volle Belastung die ungünstigste.

Dieses einfache Verfahren zur Ermittlung der Belastungsgrenzen ist auch für die Streben anwendbar. Doch kommt hier in der Regel zu dem Schnittpunkt auf der Kämpferdrucklinie noch eine zweite Belastungsscheide hinzu, nämlich der die Strebe treffende Querschnitt. Denn wie bei gewöhnlichen Balkenfachwerken beanspruchen Lasten unmittelbar links und rechts von der Strebe den Stab in der Regel in entgegengesetztem Sinne.

Kämpferdruck- und Umhüllungslinien sind für die Ableitung der Einflusslinien, wie sie in der folgenden Nummer beschrieben wird, nicht notwendig, dagegen bilden sie den Ausgangspunkt des sogenannten älteren Rechnungsverfahrens: (Nr. 64.) Auch bieten sie vielfach ein schätzenswertes Kontrollmittel und gewähren überhaupt einen bequemen Überblick über die Belastungsverhältnisse gelenkloser Bogenträger.

57. Einfluss des Eigengewichtes.

Nachdem durch die fünf Seilecke die Grundlage für die statische Berechnung eines gelenklosen Bogens geschaffen ist, wird man sich in der Regel zunächst der Aufgabe zuwenden, die unter dem Eigengewichte entstehenden Stabkräfte zu ermitteln.

Die Eigengewichtslast betrage auf die Längeneinheit g; das gibt für jeden Pfosten, gleiche Abstände vorausgesetzt, eine Einzellast $P = gf$. Man summiert nun in den Seilecken 1, 3 und 5 die Ordinaten z unter jedem Pfosten und findet hieraus für den Auflagerdruck R die Komponenten

$$M = gf \,.\, \Sigma(z),$$

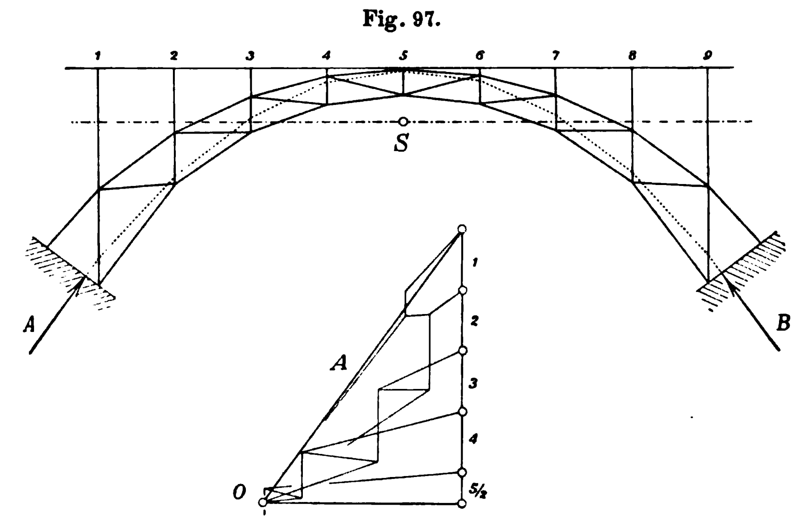
$$V = \frac{gf \,.\, \Sigma(z_1)}{t_1} \text{ und } H = \frac{gf \,.\, \Sigma(z_2)}{t_2}.$$

Bei symmetrischer Bogenform wird V kurzweg gleich der Hälfte sämtlicher Lasten. Setzt man hierauf die Kräfte V und H zusammen, so bekommt man die Richtung und Grösse des Auflagerdrucks R; die Lage wird durch die Strecke $u = \frac{M}{V}$ bestimmt.

Nun setzt man die Kraft R mit den Pfostenlasten zu einem Krafteck zusammen und zeichnet (Fig. 97) die Drucklinie für Eigengewicht.

Um grössere Genauigkeit zu erzielen, empfiehlt es sich, die Lage der Drucklinie im Scheitel direkt zu bestimmen. Zu diesem

Fig. 97.



Zwecke summiert man die Ordinaten z zwischen Seileck und beiden Endseiten; dann ist das Scheitelmoment $M_s = g f . \Sigma(z)$, und man findet in $m = \frac{M_s}{H} = \frac{\Sigma(z)}{\Sigma(z_2)} . t_2$ die Strecke, um welche die Drucklinie im Scheitel oberhalb des Punktes S liegt. Damit wird eine willkommene Kontrolle geschaffen. Man kann jetzt mit dem Zeichnen der Drucklinie im Scheitel beginnen und findet dann eine Kontrolle darin, dass ihre letzte Seite durch den Punkt U gehen muss.

Ist die Bogenachse eine Parabel, so verläuft die Drucklinie für Eigengewicht im Scheitel stets oberhalb, am Kämpfer unterhalb der Bogenachse. Nur bei unendlich kleiner Bogenhöhe fallen Drucklinie und Bogenachse zusammen. Je weiter die Gurtungen voneinander entfernt sind, desto mehr verschiebt sich die Drucklinie im

Scheitel nach oben, am Kämpfer nach unten. Angenähert ist die Abweichung beider Linien am Scheitel gleich $\frac{15\,h^2}{16\,f}$, am Kämpfer (lotrecht gemessen) gleich $\frac{15\,h^2}{8\,f}$, worin h die (örtliche) Bogenhöhe und f die Pfeilhöhe des Bogens bedeutet. (Vgl. Nr. 65.) Ungenauigkeiten und Fehler, die bei der vorangegangenen Arbeit begangen wurden, lassen sich in der Regel daran erkennen, dass die Drucklinie diesen Bedingungen widerspricht.

Ist die Drucklinie gezeichnet, so kann man mit ihrer Hilfe jede beliebige Stabkraft berechnen. Bei den Gurtungen wendet man hierzu das Momentenverfahren, bei den Streben das Schnittverfahren an. Wünscht man sämtliche Stabkräfte zu kennen, so führt ein Cremona'scher Kräfteplan am schnellsten zum Ziele. Man beginnt diesen Plan, indem man den Auflagerdruck R nach dem Schnittverfahren in die drei ersten Stabrichtungen zerlegt; von da an läuft die Arbeit in gewohnter Weise weiter. Bei zahlreichen Stäben tut man gut, einzelne Gurtstäbe nach dem Momentenverfahren zu bestimmen, um von Zeit zu Zeit eine Probe zu erhalten. Bei unsymmetrischen Bogen empfiehlt es sich ferner, die Arbeit an beiden Enden zu beginnen und gegen den Scheitel hin zu arbeiten. Bei symmetrischen Bogen beschränkt man den Plan selbstverständlich auf die Hälfte.

Der Sinn der Stabkräfte ist unschwer zu erkennen. Solange die Drucklinie zwischen beiden Gurtungen verläuft, werden beide Gurtungen auf Druck beansprucht; nur wo die Drucklinie heraustritt, entsteht in der entgegengesetzten Gurtung Zug. Was die Streben betrifft, so gilt die Regel: Verfolgt man die Zickzacklinie der Strebenkräfte vom Auflager bis zum Scheitel, so bedeuten steigende Kräfte Druck, fallende Zug.

Werden die Stabkräfte mittels eines Cremona-Planes berechnet, so hat man die Drucklinie streng genommen nicht nötig, sie bietet jedoch ein vortreffliches Prüfungsmittel für die Richtigkeit der vorangegangenen Zeichnungen.

Ein zweites Mittel zur Bestimmung der Stabkräfte für Eigengewicht bieten die Einflusslinien dar. (Vgl. die folgende Nummer.) Doch gelangt man mittels der Drucklinie gewöhnlich rascher zum Ziele.

Besitzt der Bogen doppelten Strebenzug, so wird der Cremona-Plan nach Anleitung der Nr. 36 im II. Teil dieses Werkes gezeichnet.

Oder man zeichnet zwei Pläne, den einen für die fallenden, den andern für die steigenden Streben und nimmt von den Ergebnissen beider Pläne je das arithmetische Mittel.

Ist das eigene Gewicht des Bogens ungleichförmig verteilt, so müssen die Ordinaten z einzeln mit den ihnen entsprechenden Pfostenlasten multipliziert werden, wozu man sich am einfachsten der Zahlenrechnung bedient. Es ist in diesem Fall $M = \Sigma(P z)$, $V = \frac{\Sigma(P z_1)}{t_1}$ und $H = \frac{\Sigma(P z_2)}{t_2}$. Das nämliche gilt, wenn die Pfosten in ungleichen Abständen stehen.

58. Einflusslinien für die Stabkräfte.

Zur Berechnung der Stabkräfte für die zufällige Last wendet man im allgemeinen das Verfahren der Einflusslinien an. Bei Eisenbahnbrücken mit unregelmässiger Lastenreihe sind diese nicht zu umgehen. Zum Zeichnen dieser Linien stehen verschiedene Wege offen.

a) Erstes Verfahren.

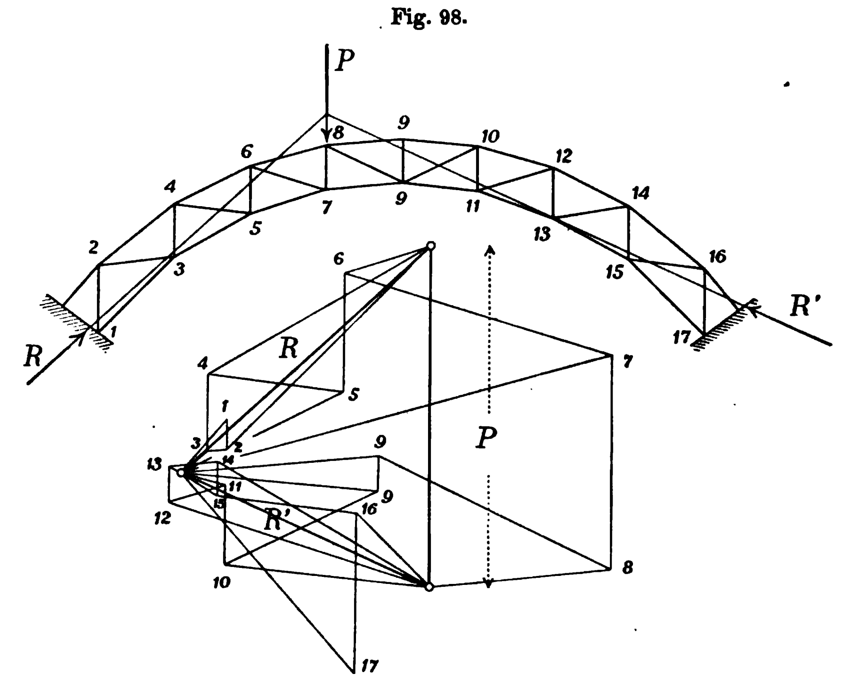
Der nächstliegende Weg besteht darin, dass man auf Grund des Vorangegangenen die Last P für jeden Fahrbahnpfosten in ihre beiden Auflagerdrücke zerlegt und daran anschliessend je einen Cremona'schen Kräfteplan zeichnet. In der Fig. 98 ist ein solcher Plan für die über 8 stehende Last gezeichnet. Man beginnt die Kräftebestimmung am besten an den beiden Auflagern nach dem Schnittverfahren und setzt sie gegen die Mitte des Bogens hin fort, woselbst sich eine Probe für die Richtigkeit der Arbeit ergibt.

Hat man diese Pläne für sämtliche Pfosten (bei symmetrischer Anordnung für die Hälfte) durchgeführt, so lassen sich die Einflusslinien durch Übertragung der einzelnen Stabkräfte leicht zeichnen. Für jeden Stab zeichnet man eine besondere Figur, indem man von einer Abszisse aus unter jedem Pfosten die ihm entsprechende Stabkraft lotrecht aufträgt und die Endpunkte durch gerade Linien verbindet.

Für P wählt man bei Bahnbrücken die am meisten vorkommende Einzellast (Gewicht eines Lokomotivrades); bei Strassenbrücken setzt man $P = p f$, worin p die auf die Längeneinheit treffende Last und f den Pfostenabstand bedeutet.

Um die Cremona'schen Pläne genau zu zeichnen, bedarf man der genauen Richtung der Gurtstäbe. Wie diese erhalten wird, ist bereits auf S. 10 angedeutet worden. Ferner empfiehlt es sich, einzelne

Fig. 98.



Gurtungskräfte durch Rechnung nach dem Momentenverfahren zu bestimmen und aufzutragen.

Das erste Verfahren eignet sich besonders gut, wenn die Zahl der Stäbe klein ist. Je grösser die Stabzahl, desto unbequemer gestaltet sich die Arbeit, teils wegen ihres Umfangs, teils weil es trotz aller Vorsicht schwierig ist, Cremona-Pläne mit der nötigen Genauigkeit zu zeichnen.

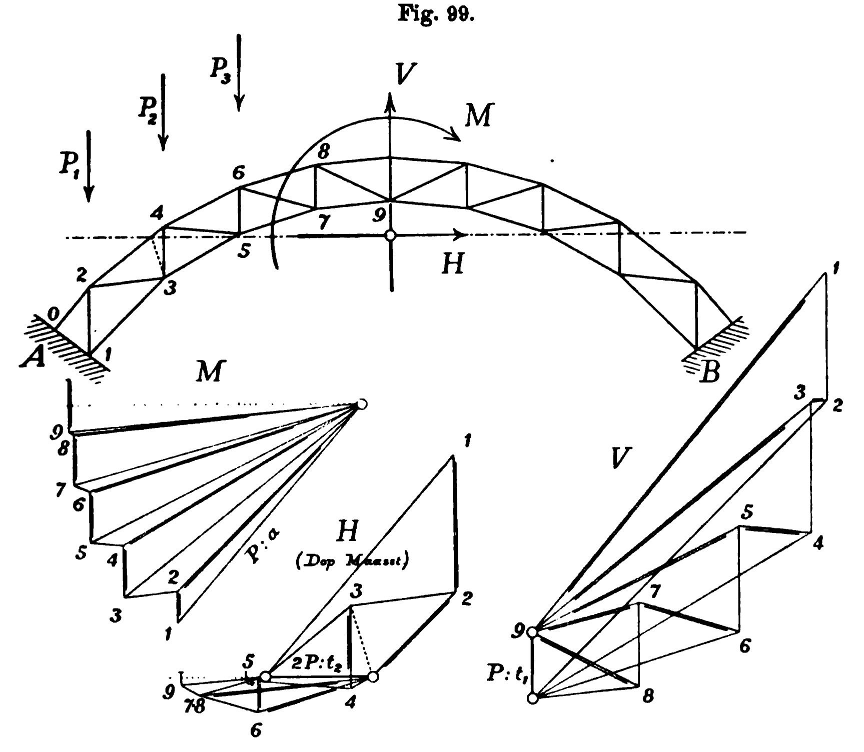
b) Zweites Verfahren.

Das zweite Verfahren besteht darin, dass man bloss drei Cremona-Pläne zeichnet, den einen für ein Kräftepaar M, den zweiten für eine durch den Schwerpunkt S gehende Kraft V, den dritten für eine durch S gehende Kraft H. (Fig. 99.)

Man beginnt den Plan M, indem man die Last P durch den Hebelarm des Stabes 1 teilt und das Ergebnis von einem Null-

punkte aus in der Richtung des Stabes 1 aufträgt. Dann zieht man durch den Punkt 1 eine Parallele zum Stabe 1 2 und durch den Nullpunkt eine Parallele zum Stabe 1 3 und fährt hierauf in gewohnter Weise fort. Beim zweiten Plane betrachtet man die Grösse $P : t_1$ als Kraft, zerlegt sie zunächst nach dem Schnittverfahren in die drei Kräfte 1, 2 und 1 2 und setzt dann die Zerlegung ebenfalls fort. Beim dritten Plane geht man von der Kraft $P : t_2$ aus und ver-

Fig. 99.



fährt in der nämlichen Weise. Bei symmetrischen Bogen führt man die Arbeit bis zum Scheitel durch, bei unsymmetrischen tut man gut, an beiden Enden zu beginnen und gegen den Scheitel hin zu arbeiten.

In sämtlichen drei Plänen treten nicht eigentliche Kräfte, sondern Kräfte geteilt durch eine Länge auf. Den Massstab kann man beliebig wählen, womöglich in allen drei Plänen gleichgross. Wenn aber, wie z. B. in Fig. 99 ein Plan dadurch zu klein würde, multipliziert man P mit einer ganzen Zahl, z. B. 2.

Jetzt trägt man die Ergebnisse dieser Cremona-Pläne, sowie die Ordinaten z der drei Seilecke in folgender Weise in eine Tabelle ein:

Stab		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	Max.	Min.	Max. + Min.
	x =	8,00	6,21	4,65	3,34	2,20	1,35	0,65	0,20	0,00			
	x_1 =	5,12	4,88	4,21	3,44	2,58	1,72	0,90	0,30	0,00			
	x_2 =	0,00	1,39	3,25	4,62	5,00	4,62	3,25	1,39	0,00			
	$t:m$	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
1	$M = +0,86$	+6,88	+5,32	+3,99	+2,87	+1,89	+1,16	+0,56	+0,17	0,00			
	$V = -1,34$	−6,88	−6,45	−5,63	−4,61	−3,46	−2,31	−1,20	−0,40	0,00			
	$H = +0,48$	0,00	+0,60	+1,40	+1,98	+2,15	+1,98	+1,40	+0,60	0,00			
		0,00	−0,58	−0,24	+0,24	+0,58	+0,83	+0,76	+0,37	0,00	+2,78	−0,77	+2,01
1—2	$M = -0,10$	−0,80	−0,62	−0,47	−0,35	−0,22	−0,14	−0,07	−0,02	0,00			
	$V = +0,35$	+1,80	+1,69	+1,48	+1,20	+0,90	+0,60	+0,31	+0,10	0,00			
	$H = -0,20$	0,00	−0,28	−0,65	−0,92	−1,00	−0,92	−0,65	−0,28	0,00			
		+1,00	+0,79	+0,36	−0,07	−0,32	−0,46	−0,41	−0,20	0,00	+2,15	−1,46	+0,69
2	$M = -0,78$	−6,24	−4,84	−3,63	−2,60	−1,72	−1,05	−0,51	−0,16	0,00			
	$V = +1,22$	+6,24	+5,89	+5,12	+4,20	+3,15	+2,10	+1,10	+0,37	0,00			
	$H = -0,17$	0,00	−0,24	−0,55	−0,78	−0,85	−0,78	−0,55	−0,24	0,00			
		0,00	+0,81	+0,94	+0,82	+0,58	+0,27	+0,04	−0,03	0,00	+3,46	−0,03	+3,43
2—3	$M = -0,15$	−1,20	−0,93	−0,70	−0,50	−0,33	−0,20	−0,10	−0,08	0,00			
	$V = -0,05$	−0,26	−0,24	−0,21	−0,17	−0,13	−0,09	−0,05	−0,02	0,00			
	$H = +0,16$	0,00	+0,22	+0,52	+0,74	+0,80	+0,74	+0,52	+0,22	0,00			
		−1,46	−0,95	−0,39	+0,05	+0,34	+0,45	+0,37	+0,17	0,00	−2,80	+1,38	−1,42

In den obersten wagrechten Zahlenreihen werden die verschiedenen z in Metern eingeschrieben; jede Reihe enthält so viele Zahlen, als Pfosten vorhanden sind. In der zweiten senkrechten Zahlenreihe stehen die Ergebnisse der drei Cremona-Pläne; für jeden Stab bekommt man drei Werte, in Tonnen pro Meter ausgedrückt. Zugkräfte werden mit dem Plus-, Druckkräfte mit dem Minuszeichen versehen. (In den Plänen sind Druckkräfte durch einen Doppelstrich hervorgehoben.) Jetzt multipliziert man diese Zahlen mit den zugehörigen z, je die erste Zahl mit dem darüberstehenden z, die zweite mit z_1, die dritte mit z_2. Die Produkte sind in Tonnen ausgedrückte Kräfte. Hierauf addiert man für jeden Stab die drei Produkte unter Berücksichtigung der Vorzeichen und erhält damit die Elemente der Einflusslinien. Das Auftragen der Einflusslinien bedarf keiner weiteren Erklärung.

Handelt es sich um eine Strassenbrücke, so kann man das Zeichnen der Einflusslinien umgehen, indem man die grösste und kleinste Stabkraft dadurch bestimmt, dass man von den Produktsummen je die positiven und die negativen addiert. Die eine Summe wird in die Reihe „Max.“, die andere in die Reihe „Min.“ eingeschrieben. In die letzte Zahlenreihe endlich wird die Summe von „Max.“ und „Min.“ eingetragen; sie dient dazu, den Einfluss des Eigengewichtes zu bestimmen. Man braucht zu diesem Zwecke bloss die Werte „Max. + Min.“ mit $g:p$ zu multiplizieren. Die auf diesem Wege bestimmten Stabkräfte sind stets etwas zu gross, nämlich grösser, als wenn man den Inhalt der Einflussfläche misst. (Vgl. S. 76.)

Handelt es sich um eine Bahnbrücke oder allgemein um einen Bogen, dessen zufällige Last aus unregelmässigen Einzelkräften besteht, so lässt sich das Aufzeichnen der Einflusslinien nicht umgehen. Auch bei Strassenbrücken sind diese Linien von Wert, weil aus ihrem Verlauf etwaige Rechnungsfehler leicht erkannt werden können.

Das zweite Verfahren verlangt zwar wie das erste das Zeichnen von Cremona-Plänen, doch beschränkt sich deren Zahl auf drei, so dass sie mit um so grösserer Genauigkeit gezeichnet werden können. Bei grosser Pfostenzahl wird man das zweite Verfahren dem ersten vorziehen.

c) Drittes Verfahren.

Nach dem dritten Verfahren zur Ermittlung der Einflusslinien berechnet man die Kräfte auf Grund der Drucklinien für Einzellasten, aber nicht wie beim ersten Verfahren mittels Cremona-

Plänen, sondern bei den Gurtungen nach dem Momentenverfahren, bei den Streben nach dem Schnittverfahren.

Bei den **Gurtungen** multipliziert man die Auflagerkraft mit ihrem Abstande vom Drehpunkte des Stabes und teilt das Produkt durch den Hebelarm des Stabes. Nennt man den Hebelarm der Kraft r und denjenigen des Stabes a, so ist die gesuchte Stabkraft

$$S = \frac{R \cdot r}{a}.$$

Solange die Last rechts vom Stabe liegt, ist der linke Auflagerdruck R massgebend, für Lasten links vom Stabe der rechte Auflagerdruck R'. Die Auflagerdrücke ergeben sich aus der Zerlegung der Lasten P; die Hebelarme r und a werden in der Zeichnung abgegriffen. Will man genauer vorgehen, so berechnet man die a aus den Koordinaten der Knotenpunkte. Die Zahlenrechnung gestaltet sich nach Anleitung der nachfolgenden Tabelle übersichtlich und bequem:

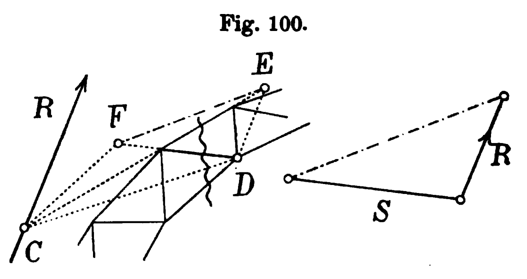
Stab		P_1		P_2		P_3		.....	Max.	Min.	Max. + Min.
		t		t		t					
	$R =$	10,0		9,3		9,7		.....			
	$R' =$	0,0		2,8		5,4		.....			
	a	r	S	r	S	r	S	.....			
	m	m	t	m	t	m	t		t	t	t
1	−1,15	0	0	+0,62	−5,8	+0,28	−2,4	.....	+27,8	− 7,7	+20,1
1 2			+10,0		+7,9		+3,6	.....	+21,5	−14,6	+ 6,9
2	+1,25	0	0	+0,95	+8,1	+1,26	+9,4	.....	+34,6	− 0,3	+34,3
2 3			−14,6		−9,5		−3,9	.....	−28,0	+13,8	−14,2

Die erste wagrechte Zahlenreihe enthält die Kräfte R, die zweite die Kräfte R' für die verschiedenen Stellungen einer Last $P = 10\,t$. In den senkrechten Reihen folgen sich die Stabnummern und die Hebelarme a, hierauf die Hebelarme r und die Kräfte $S = \frac{R \cdot r}{a}$, die meistens genau genug mittels des Rechenschiebers berechnet werden können. Was die Vorzeichen betrifft, so gibt man den a für die untern Gurtungen das Plus-, für die obern Gurtungen das Minuszeichen; die r erhalten das Plus- oder das Minuszeichen, je nachdem die Auflagerdrücke in positivem oder negativem Sinne um den Drehpunkt des Stabes drehen, wobei man sowohl R als R'

von links nach rechts laufen lässt. Das Vorzeichen von S ergibt sich hiernach von selbst. Die Kräfte S bilden jetzt die Elemente der Einflusslinien.

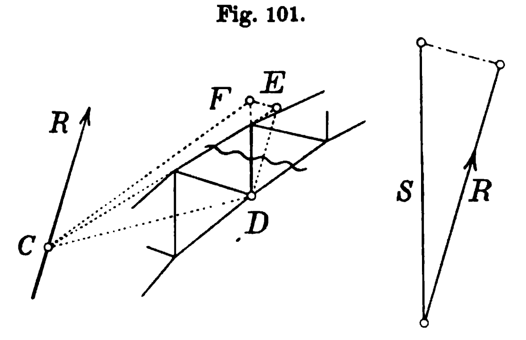
Bei Strassenbrücken kann man das Zeichnen der Einflusslinien umgehen und die grössten und kleinsten Stabkräfte durch getrenntes Addieren der positiven und negativen Zahlen einer wagrechten Reihe finden. Man erhält dabei die Werte „Max." und „Min." Addiert man noch diese beiden Werte und multipliziert ihre Summe mit $g:p$, so bekommt man die Stabkräfte für Eigengewicht.

Fig. 100.



Bei den Streben wendet man besser das Schnittverfahren an, weil die Drehpunkte meist weit abseits liegen. Um (Fig. 100) aus dem Auflagerdruck R die Kraft in der Strebe DF zu finden, verlängert man die zugehörige obere Gurtung bis C und E und zieht DE parallel zu R. Ferner zieht man CF parallel zur untern Gurtung und verbindet F mit E. Dann wird die Kraft S gefunden, wenn man R parallel zu DF und EF zerlegt.

Fig. 101.



Die Kraft S wird ja bekanntlich gefunden, wenn man zuerst R parallel zu CE und zu CD und hierauf die zweite Teilkraft parallel zur Strebe und zur untern Gurtung zerlegt. Angenommen, die Kraft R werde durch DE dargestellt, so gelangt man hierbei auf die Strecke DF. Die Kräfte R und S verhalten sich daher zueinander wie DE zu DF.

In derselben Weise lassen sich lotrechte Streben behandeln. (Fig. 101.) Man zieht DE parallel zu R, verlängert die obere Gurtung bis C und E, zieht CF parallel zur untern Gurtung und zerlegt hierauf R parallel zur Strebe und zu EF.

Dass man für die Zerlegung von R nicht jedesmal eine neue Figur zu zeichnen braucht, sondern mehrere Zerlegungen vereinigen kann, ist einleuchtend.

Aus den so bestimmten Stabkräften bildet man schliesslich die Einflusslinien.

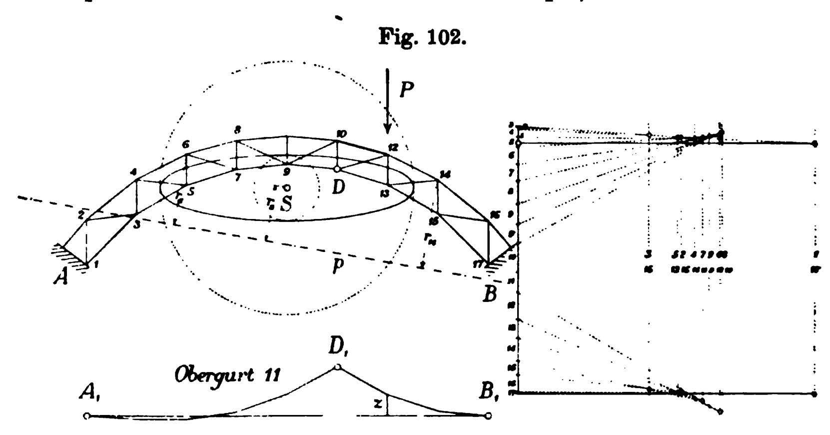
Das dritte Verfahren ist im allgemeinen das empfehlenswerteste. Wenn die Stabzahl gross ist, braucht man nur jeden zweiten oder dritten Stab zu berechnen und kann die übrigen Kräfte durch Interpolation finden. Immerhin ist bei den Streben Vorsicht geboten, sobald nicht über jedem Knotenpunkte ein Fahrbahnpfosten steht; denn die Streben zunächst den Angriffspunkten der Pfosten werden in der Regel stärker beansprucht als die übrigen. (Vgl. Tafel III.) Man tut daher gut, auf alle Fälle diese Streben der Berechnung zu unterziehen.

d) Viertes Verfahren.

Handelt es sich um eine einzige oder um ganz wenige Einflusslinien, so ist folgendes Verfahren empfehlenswert.

Soll z. B. die Einflusslinie $A_1 B_1$ für den Gurtstab 10—12 gezeichnet werden (Fig. 102), so bestimmt man die Antipolare p des Drehpunktes D hinsichtlich der Elastizitätsellipse, denkt sich in dieser

Fig. 102.



Linie eine Kraft wirkend und zeichnet hierfür die Durchbiegungskurve des Bogens, wobei man wie üblich bloss die Gurtstäbe berücksichtigt. Zu diesem Zwecke trägt man die Abstände r der Knotenpunkte von der Linie p als lotrechte Kräfte auf, macht die Werte $\frac{c \cdot g}{\Delta g}$, worin c eine beliebige Länge ist, zu Polweiten und

zeichnet dazu ein Seileck. Dieses besteht aus zwei Zweigen, der eine geht von A_1 bis D_1, der andre von B_1 bis D_1. Beide beginnen in wagrechter Richtung und treffen sich lotrecht unter D. Nennt man die Ordinaten der Einflussflächen z und die Einzellast P, so ist die Stabkraft $S = \frac{P.z}{m}$, worin $m = \frac{a.r_s}{c}$.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Lässt man im Stabe 10—12 eine Kraft S wirken, während der Bogen in B festgehalten wird, so entsteht in D eine Drehung von der Grösse $\delta = \frac{S s}{E F a}$. (Vgl. S. 55.) Um die Verschiebung, welche das Bogenende A erfährt, rückgängig zu machen, muss in der Antipolaren von D eine Kraft R wirken, deren Grösse sich aus der Beziehung $\delta = R\, g\, r_s$ bestimmen lässt. (S. 56.) Es ist demnach $R = \frac{S s}{E F a g r_s}$. Diese Kraft bewirkt in den einzelnen Knotenpunkten Drehungen von der Grösse $\Delta \delta = R r . \Delta g = \frac{S s r . \Delta g}{E F a g r_s}$. Betrachtet man diese Winkel als Kräfte und setzt sie durch ein Seileck zusammen, so erhält man die gesuchte Durchbiegungskurve, also die Einflusslinie für die Stabkraft S. Wählt man gemäss obiger Regel die r als Kräfte und die Werte $\frac{c.g}{\Delta g}$ als Polweiten, so wird in der Zeichnung $\Delta \delta = \frac{r . \Delta g}{c . g}$. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke von $\Delta \delta$ folgt $c S s = E F a r_s$.

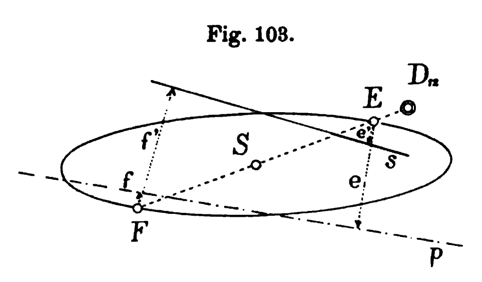
Bei obiger Formänderung ist die virtuelle Arbeit von S gleich derjenigen von P, also $\frac{S^2 s}{E F} = P z$. Setzt man, wie oben, noch $S = \frac{P.z}{m}$, so folgt durch Vereinigung der drei letzten Gleichungen $m = \frac{a\, r_s}{c}$, womit die Richtigkeit obiger Angaben bewiesen ist.

Soll die Einflusslinie für eine zweite Stabkraft gezeichnet werden, so ändert sich bloss die Antipolare p und damit die Hebelarme r; die Polweiten des Kraftecks bleiben stets dieselben.

Wenn man das Verfahren auf eine Strebe anwendet, so kommt die Linie p gewöhnlich sehr nahe an den Schwerpunkt S zu liegen und r_s wird sehr klein (bei unendlich fernem Drehpunkt sogar null).

Zugleich wird der Hebelarm a des Stabes sehr gross. Infolgedessen wird die Berechnung der Länge m ungenau oder gar unmöglich. In diesem Falle beachte man, dass $a r_s$ nichts anderes ist als das Zentrifugalmoment eines in S befindlichen Gewichtes eins bezogen auf die Stabrichtung und die Linie p. (Vgl. Teil II, S. 117.) Dieses Zentrifugalmoment wird aber auch gefunden, wenn man (Fig. 103) den durch D gehenden Ellipsendurchmesser zieht und in den Endpunkten E und F desselben das Gewicht $\frac{1}{2}$ anbringt. Es ist daher $a r_s = \frac{1}{2}(e e' + f f')$.

Fig. 103.



Das vierte Verfahren besitzt nebenbei noch den Vorteil, dass es rasch erkennen lässt, wo die Einflusslinien Wendepunkte haben; diese liegen nämlich stets da, wo die Linie p den Bogen schneidet.

e) Kinkels Verfahren.

Ein interessantes Verfahren zum Zeichnen der Einflusslinien für gelenklose Bogen hat Ingenieur Md. Kinkel in der Schweizerischen Bauzeitung vom 6., 13. u. 27. November 1897 beschrieben. (Fig. 104 u. 105.) Das Verfahren knüpft an die drei Seilecke 1, 3 und 5 der Fig. 94 an und geht darauf aus, den Einfluss von M und V durch eine Kurve, den Einfluss von H durch eine andere Kurve darzustellen, derart, dass die beiden Kurven die gesuchte Einflussfläche einschliessen.

Nach den in der Fig. 104 eingeschriebenen Bezeichnungen ist die Kraft in einem Stabe, beispielsweise im untern Gurtstab des fünften Feldes, für rechts liegende Lasten

$$S = \frac{M + V.x - H.y}{a} = \frac{P}{a}\left(z + \frac{z_1 x}{t_1} - \frac{z_2 y}{t_2}\right)$$

und für links liegende Lasten

$$S = \frac{P}{a}\left(z' - \frac{z_1' x}{t_1} - \frac{z_2' y}{t_2}\right).$$

Die eine der beiden Kurven stellt nun die Werte $z \pm \frac{z_1 x}{t_1}$, die andre die Werte $\frac{z_2 y}{t_2}$ dar. Hierbei ergibt sich folgendes. Trägt

man erst die Ordinaten z auf und fügt hierauf die Ordinaten $\frac{z_1 x}{t_1}$ hinzu, so bekommt man zwei Kurven, deren entsprechende Seiten sich in festen Punkten schneiden, gleichgültig, welchen Stab man ins Auge fasst. Bildet man ferner aus den Ordinaten $\frac{z_2 y}{t_2}$ eine Kurve und verlängert deren Seiten bis zur Grundlinie, so bekommt man eine zweite Reihe von Punkten, die indessen sämtlich auf der Grundlinie liegen. Hat man die beiden Punktreihen bestimmt, so genügt es, für jede der beiden Kurven einen einzigen Punkt zu kennen, um die Kurven zeichnen zu können.

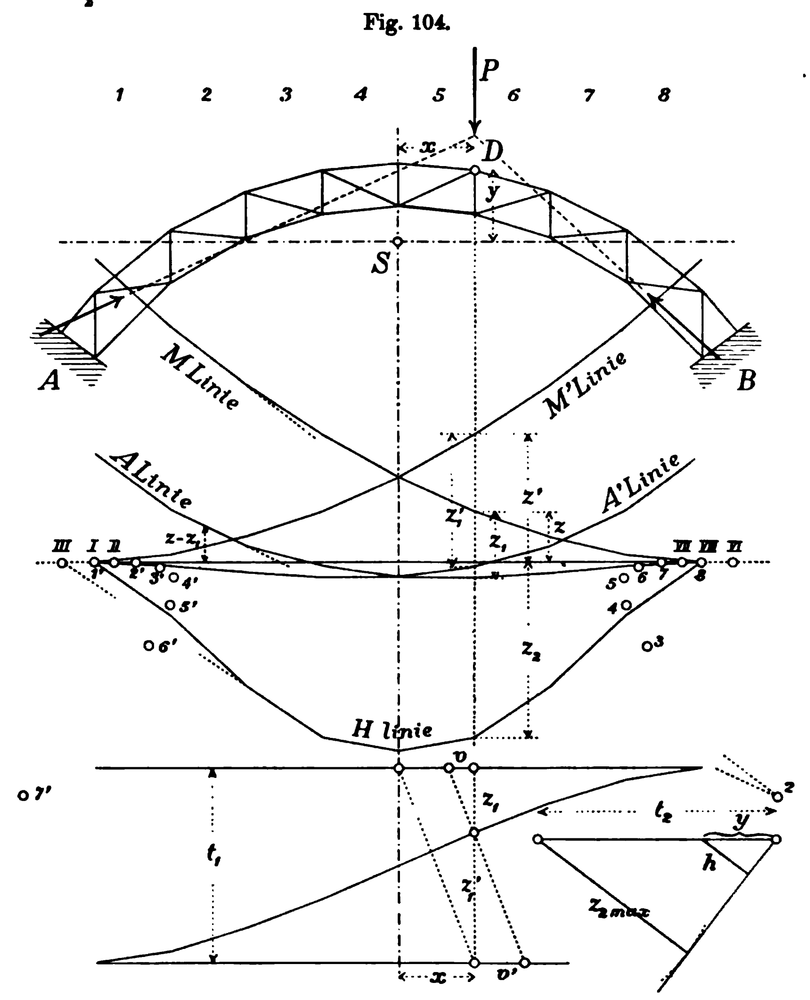
Im einzelnen gestaltet sich das Verfahren wie folgt:

Man trägt zuerst von einer wagrechten Grundlinie aus die Werte z auf. (Fig. 104.) Die Verbindung der Endpunkte führt zur M-Linie. Hierauf fügt man die Werte z_1 an, nach Belieben positiv oder negativ; die Verbindung der Endpunkte liefert die A-Linie. Nun verlängert man je zwei entsprechende Seiten der beiden Polygone bis zu ihren Schnittpunkten, das sind die festen Punkte 1, 2, 3 u. s. w. Dasselbe geschieht mit den Werten z' und z_1'; man erhält dabei die Punkte 1′, 2′, 3′ u. s. w. Trägt man hierauf von der Grundlinie aus die Werte z_2 auf, verbindet ihre Endpunkte und verlängert die Seiten, so gelangt man auf die festen Punkte I, II, III, IV u. s. w. Durch diese Punkte müssen nun die Seiten der Einflusslinien sämtlicher Stäbe gehen. Jede Einflusslinie besteht aus drei Teilen, einem A-Ast, einem A'-Ast und einem H-Ast. (Fig. 105.) Ist der Schnittpunkt B der Äste A und A' bekannt, so verbindet man ihn mit dem Punkte 6, den nächsten Punkt mit 7 u. s. w.; ebenso verbindet man B mit 5′, dann mit 4′, dann mit 3′ u. s. w., bis man zum Auflager gelangt. Kennt man ferner den Mittelpunkt des H-Astes, so braucht man ihn nur fortlaufend mit den Punkten V, VI, VII u. s. w., sowie mit den Punkten IV, III, II u. s. w. zu verbinden, um den H-Ast zu erhalten.

Der Punkt B liegt lotrecht unter dem Drehpunkt D des zu berechnenden Stabes. Um ihn zu finden, trägt man zuerst z auf; hierauf bestimmt man die Strecke $v = \frac{z_1 x}{t_1}$ und fügt sie hinzu. Ebenso trägt man z' auf und fügt die Strecke $v' = \frac{z_1' x}{t_1}$ hinzu. Beide Wege führen auf den nämlichen Punkt. Wie die Strecken v

und v' gefunden werden, ist in der Fig. 104 unten gezeigt. Um den Mittelpunkt des H-Astes zu finden, bestimmt man die Strecke $h = \frac{z_2 y}{t_2}$, wobei man für z_2 die grösste Ordinate der H-Linie wählt.

Fig. 104.

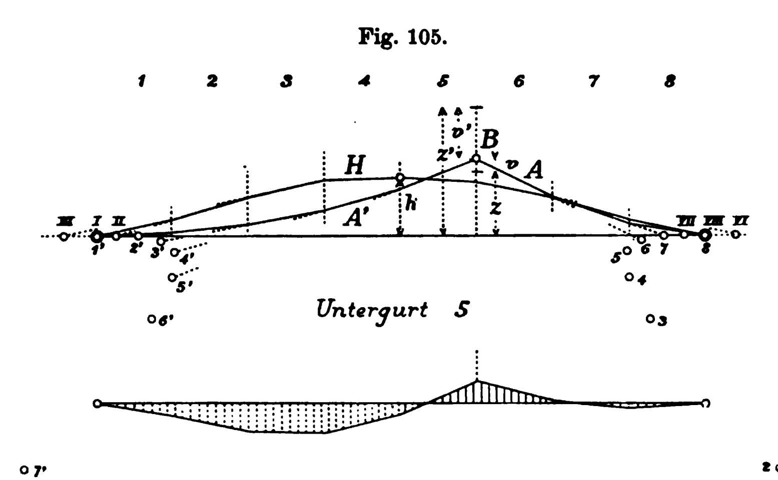


Zur Bestimmung von h verwendet man einen Verwandlungswinkel. (Fig. 104 rechts unten.)

Die Fig. 105 erläutert das Verfahren für den untern Gurtstab des fünften Faches. Der bessern Anschaulichkeit wegen ist die Einflussfläche in der Figur noch besonders aufgetragen und schraffiert worden.

Zu bemerken ist noch, dass der H-Ast stets auf der gleichen Seite der Grundlinie liegt wie der Drehpunkt zur x-Achse. Die Äste A und A' liegen stets oberhalb der Grundlinie.

Fig. 105.



Hat man die grösste Ordinatensumme der Einflussfläche gefunden, so ist die gesuchte Stabkraft schliesslich $S = \frac{P \cdot \Sigma(z)}{a}$.

Für die Streben wird das Verfahren leider umständlicher, namentlich, weil die Drehpunkte der Streben meistens weit abseits liegen. (Vgl. in der oben angegebenen Quelle die Originalbeschreibung des Verfahrens.)

In den vorliegenden Erörterungen ist stets einfacher Strebenzug vorausgesetzt worden. Besitzt der Bogen gekreuzte Streben, so ändern sich zunächst die Cremona-Pläne. Entweder zeichnet man deren je zwei, indem man zuerst die fallenden und dann die steigenden Streben ins Auge fasst, oder man vereinigt beide Pläne in einen. (S. 82.) Sodann verlegt man die Drehpunkte der Gurtungen in deren Mitten oder bestimmt sie, was genauer ist, durch eine Linie, die den Schnittpunkt der anstossenden Pfosten mit dem Kreuzungspunkte der Streben verbindet. (Fig. 32, S. 58.)

Schliesslich tut man bei gekreuzten Streben stets gut, die Berechnung der Strebenkräfte mit Rücksicht auf die elastische Verkürzung der Gurtungen nachträglich zu verbessern, wie es auf der S. 82 gezeigt worden ist. —

Man mag zur Berechnung der grössten und kleinsten Stabkräfte eines gelenklosen Bogens das eine oder das andere Verfahren anwenden, die Arbeit ist stets eine umständliche und zeitraubende. Wesentlich kürzer gestaltet sich die Berechnung, wenn man das sogenannte ältere Verfahren benutzt. (Nr. 64.) Mag diese ältere Rechnungsweise auch bei Bogen mit zwei Gelenken als veraltet anzusehen sein, bei Bogen mit null Gelenken leistet sie, wenigstens bei Strassenbrücken, immer noch schätzbare Dienste. Selbst bei Eisenbahnbrücken erweist sich das ältere Verfahren als nützlich, sobald man sich erlauben darf, die Verkehrslast als gleichförmig verteilt in Rechnung zu ziehen.

59. Einfluss der Wärme.

Nimmt die innere Wärme des Bogenträgers um t Grade zu, und hält man das rechtsseitige Bogenende fest, so will sich das linksseitige in wagrechter Richtung um die Strecke $\alpha t l$ verschieben, worin α den Ausdehnungskoeffizienten und l die Spannweite bezeichnen. Da diese Verschiebung unmöglich ist, so entsteht im Bogen eine Temperaturkraft T, die so beschaffen ist, dass sie obige Verschiebung wieder rückgängig macht. Wir fassen diese Verschiebung, symmetrische Bogenform vorausgesetzt, als eine Drehung um den unendlich fernen Punkt der y-Achse auf; dann folgt, dass die Kraft T in der Antipolaren dieses Punktes, also in der x-Achse liegen muss. Die Grösse der Verschiebung ist gleich T mal dem Zentrifugalmomente der elastischen Gewichte bezogen auf die Kraft- und die Verschiebungsrichtung, also, wenn man, wie früher, den Punkt S mit dem Bogenende verbunden denkt, gleich T mal dem Trägheitsmomente der Gewichte bezogen auf die x-Achse, folglich gleich $T \cdot g \cdot i_2^2$. Setzt man diesen Wert gleich $\alpha t l$, so folgt

$$T = \frac{\alpha t l}{g i_2^2}.$$

Ist der Elastizitätsmodul E bei der Berechnung der elastischen Gewichte gleich eins gesetzt worden, so muss er nachträglich hinzugefügt werden, so dass man $T = \frac{E \alpha t l}{g i_2^2}$ zu setzen hat.

Ist die Temperaturkraft berechnet, so lassen sich die Stabkräfte, die infolge der Wärmeschwankung auftreten, mittels eines Cremona-

schen Kräfteplans leicht finden. Dieser Plan hat genau die Form des Kräfteplans H in der Fig. 99. (S. 213.)

Nimmt die Wärme nicht zu, sondern ab, so wird T negativ. Geht man, was ziemlich allgemein üblich ist, von der Annahme aus, dass die höchste Temperatur des Bauwerks um t Grade über der Bautemperatur und die niedrigste um ebensoviel unter derselben liege, so sind die von der Wärme stammenden Stabkräfte ebensowohl mit dem positiven, wie mit dem negativen Vorzeichen in die Rechnung einzuführen.

Fraglich ist schliesslich, welche Länge man als Spannweite einzusetzen hat. In dieser Hinsicht ist die Anordnung des Bogenauflagers massgebend. Sind die beiden Stützpunkte des Bogens durch einen radialen Querstab verbunden, und ist der eine Stützpunkt mit einem beweglichen Auflagerstuhl versehen, so ist l gleich der Entfernung der beiden festen Stützpunkte. Sind beide Stützpunkte festgelagert, so tut man am besten, die Spannweite von der Mitte zwischen den beiden Stützpunkten aus zu messen. Fehlt der Querstab und ist keiner der Stützpunkte beweglich gelagert, so ist derjenige Gurtstab als fest anzusehen, an den sich die erste Strebe anschliesst, also in der Fig. 104 (S. 222) der untere. Sind die Streben gekreuzt angeordnet und ist kein bewegliches Lager vorhanden, so ist wieder die Mitte zwischen beiden Stützpunkten als Endpunkt der Spannweite anzusehen.

Erwärmt sich nicht der ganze Bogen, sondern nur ein einzelner Stab oder eine Gruppe von Stäben, so bekommt man die Temperaturkraft in folgender Weise:

Bei t Grad Wärmeerhöhung verlängert sich der Stab um $\alpha t s$. Hieraus entsteht im Drehpunkte eine Winkeländerung $\Delta\delta = \frac{\alpha t s}{a}$; diese bewirkt eine lotrechte Verschiebung des Schwerpunktes $\Delta v = x . \Delta\delta$ und eine wagrechte Verschiebung $\Delta h = y . \Delta\delta$. Erstreckt sich die Wärmezunahme auf mehrere Stäbe, so ergibt sich $\delta = \alpha t . \Sigma\left(\frac{s}{a}\right)$, $v = \alpha t . \Sigma\left(\frac{x s}{a}\right)$ und $h = \alpha t . \Sigma\left(\frac{y s}{a}\right)$. Diesen Formänderungen entsprechen (vgl. S. 204) drei Kräfte $M = \frac{\delta}{g}$, $V = \frac{v}{g\, i_1^2}$ und $H = \frac{h}{g\, i_2^2}$. Durch Zusammensetzen dieser drei Teilkräfte lässt

sich die Mittelkraft T finden, worauf ein Cremona'scher Plan die gesuchten Stabkräfte liefert.

Man erkennt leicht, dass die $\Delta\delta$ für die untern Gurtstäbe positiv, für die obern negativ zu rechnen sind. Allgemein (auch für die Streben) gilt die Regel, dass die Formänderungswinkel dasselbe Vorzeichen haben wie die Stabkräfte, die von einem positiven Drehmoment M hervorgerufen werden.

Die drei Summenausdrücke haben mit den elastischen Gewichten keinen unmittelbaren Zusammenhang und müssen daher besonders berechnet werden; entweder graphisch, indem man die $\frac{s}{a}$ als Kräfte ansieht und zwei Seilpolygone zeichnet, oder, was meistens bequemer ist, durch Zahlenrechnung.

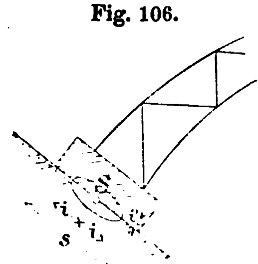
60. Bewegungen der Widerlager.

Bewegungen der Widerlager beeinflussen die Stabkräfte ähnlich wie die Wärmeschwankungen, um so mehr, je weniger Gelenke in den Bogen eingeschaltet sind. Am ungünstigsten erweisen sich in dieser Hinsicht die gelenklosen Bogen. Die Bewegungen sind entweder elastisch, d. h. sie sind dem Auflagerdruck proportional und verschwinden wieder, wenn der Auflagerdruck aufhört; oder sie sind unelastisch, d. h. vom Auflagerdruck unabhängig.

a) Elastische Bewegungen.

Elastische Bewegungen eines Widerlagers werden am einfachsten dadurch berücksichtigt, dass man die Nachgiebigkeit des Widerlagers durch eine Elastizitätsellipse ausdrückt und diese Ellipse in den Kräfteplan einfügt. Zwei Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

Fig. 106.



Der Bogen stütze sich auf ein knappes, in der Fig. 106 schraffiertes Mauerwerk von der Länge s und der Breite b, und dieses ruhe auf einem nachgiebigen Baugrunde. C sei die Bettungsziffer, d. h. die Anzahl Kilogramme, die nötig sind, um eine Fläche von 1 cm^2 um 1 cm einzudrücken. (Vgl. Teil III, S. 187.) Dann wird die Nachgiebigkeit des Fundamentgrundes durch eine Ellipse mit dem Ge-

wichte $g = \frac{12}{C b s^3}$ dargestellt, deren Mittelpunkt in der Mitte der Fundamentfläche liegt und deren Halbachse $i = \sqrt{1/12} . s$ ist.

Die Richtigkeit dieser Angaben ergibt sich am einfachsten aus einer Probe. Greift eine Kraft P im Mittelpunkt der Fundamentfläche an, so ist der spezifische Druck $\sigma = \frac{P}{b s}$, folglich die Einpressung $p = \frac{\sigma}{C} = \frac{P}{C b s}$. Aus der Elastizitätsellipse berechnet, findet man $p = P g i^2$. Setzt man in diese Formel obige Werte für g und i ein, so erhält man wieder $p = \frac{P}{C b s}$. Greift ferner die Kraft im Drittel der Länge s an, so verteilt sie sich dreieckförmig über die Fläche; der spezifische Druck ist an der einen Kante null, an der andern gleich 2σ. Das nämliche bekommt man, wenn man den Punkt, um den sich hierbei die Fundamentfläche dreht, als Antipol des Angriffspunktes auffasst.

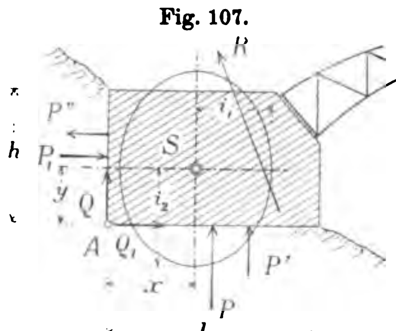
Die kleine Halbachse i' der Ellipse entspricht der Querelastizität des Bodens, d. h. dem Widerstand gegen Querverschiebung. Sie sei mit D bezeichnet, in der Weise, dass D die Kilogramme angibt, die eine Fundamentfläche von 1 cm² um 1 cm quer zu verschieben imstande sind. Dann ist $i' = i \sqrt{C : D}$. Denn die Spannung unter einer Kraft Q ist $\tau = \frac{Q}{b s}$ und die entsprechende Verschiebung $q = \frac{\tau}{D} = \frac{Q}{D b s}$; aus der Ellipse berechnet folgt $q = Q g i'^2 = \frac{Q}{D b s}$, also gleichgross.

Die Fig. 107 stellt ein zweites Beispiel eines nachgiebigen Fundamentes dar. Auch hier lässt sich die Nachgiebigkeit des Bodens durch eine Elastizitätsellipse darstellen.

Wir denken uns zunächst, das Widerlager verschiebe sich lotrecht um die Strecke v. Dann widersteht dieser Verschiebung eine Normalkraft $P = C b l v$ und eine Querkraft $Q = D b h v$. Die Mittelkraft von P und Q stellt, da ihr eine lotrechte Verschiebung entspricht, den wagrechten Durchmesser i_1 der Ellipse dar. In gleicher Weise setzt man eine wagrechte Verschiebung voraus, bestimmt daraus die Kräfte P_1 und Q_1 und erhält durch deren Zusammensetzung den lotrechten Ellipsendurchmesser i_2. Drittens nimmt man an, der Mauerkörper vollziehe eine Drehung um den Punkt A. Dann

wird die Grundfläche dreieckförmig zusammengepresst, d. h. die Kurve der spezifischen Spannung bildet ein Dreieck, und die entsprechende Kraft P' liegt im Drittel von l. Ferner entsteht in der Seitenfläche eine Zugkraft P'', die durch das Drittel von h geht. Die beiden Kräfte verhalten sich wie $l^2 : h^2$, ihre Mittelkraft R lässt sich also leicht bestimmen. Da nun R hinsichtlich der Elastizitätsellipse in der Antipolaren von A liegt, so ist die Ellipse nach Form und Grösse bestimmt. Das elastische

Fig. 107.



Gewicht endlich wird, wenn man $v = \frac{P + Q}{(Cl + Dh)b} = (P + Q) g i_1^2$ setzt, $g = \frac{1}{(Cl + Dh) b i_1^2}$ gefunden.

Will man die Ellipse nicht durch Zeichnung, sondern durch Rechnung bestimmen, so dienen die folgenden leicht abzuleitenden Formeln:

$$x = \frac{C l^2}{2(Cl + Dh)}, \qquad y = \frac{C h^2}{2(Ch + Dl)},$$

$$i_1^2 = \frac{C}{12(Cl + Dh)} \left(\frac{Cl + 4Dh}{Cl + Dh} l^3 + \frac{Ch + 4Dl}{Ch + Dl} h^3 \right),$$

$$i_2^2 = \frac{C}{12(Ch + Dl)} \left(\frac{Cl + 4Dh}{Cl + Dh} l^3 + \frac{Ch + 4Dl}{Ch + Dl} h^3 \right).$$

Neben der Nachgiebigkeit des Bodens kann man auch noch diejenige des Mauerwerks in Betracht ziehen. (Fig. 108.) Auf Grund einfacher Betrachtungen ergeben sich die Elemente der Elastizitätsellipse

$$i_1 = \sqrt{1/12} . h, \qquad i_2 = \sqrt{1/12} . l,$$

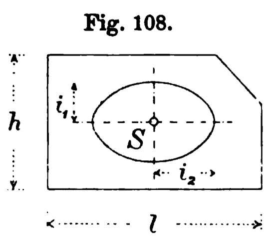
$$g = \frac{12}{E' l h b},$$

worin E' den Elastizitätsmodul des Mauerwerks bezeichnet.

Über die Grösse von C, D und E' liegen nur unsichere Angaben vor. Die Normalelastizität des Erdbodens ist bei Eisenbahnbettungen gleich 3 bis 8 kg : cm³ oder 3000 bis 8000 t : m³ gefunden worden. (Vgl. Teil III, S. 188.) Bei Fundamenten schwankt diese Zahl zwischen weiteren Grenzen und muss, falls nicht Versuche an-

gestellt werden, durch Schätzung bestimmt werden. Noch unsicherer ist die Zahl D; ohne Zweifel ist sie nicht nur von der Natur des Bodens, sondern auch von der Grösse der Fundamentfläche abhängig. Sicherer ist die Zahl E', man kann sie wohl in den meisten Fällen zwischen 100 und 200 t : cm² annehmen. Bei eisernen Bogenträgern wird man E' gewöhnlich ganz ausser acht lassen.

Fig. 108.



Ist die Elastizitätsellipse eines Bogenwiderlagers bestimmt, so lässt sich die Frage, welchen Einfluss die Nachgiebigkeit desselben auf die Stabkräfte ausübt, leicht beantworten. Man hat zu diesem Zwecke bloss zu den elastischen Gewichten des Bogens dasjenige des Fundamentes hinzuzufügen, d. h. in die fünf Seilecke, welche die Grundlage der Berechnung bilden, einzuflechten. Da das Gewicht mit einer Elastizitätsellipse verbunden ist, so muss man (ähnlich wie bei vollwandigen Bogenträgern Nr. 61) im dritten, vierten und fünften Seileck die Kräfte in den Antipolen der Hauptachsen angreifen lassen.

Sind die elastischen Gewichte des eisernen Bogens mit $E = 1$ berechnet worden, so muss das elastische Gewicht des Fundamentes mit E multipliziert werden, um mit jenem in Übereinstimmung zu gelangen.

b) Unelastische Bewegungen.

Unelastische Bewegungen des Widerlagers entstehen durch Setzungen des Fundamentes, durch Einpressen der Lagerplatten, durch ungenaue Masse an den Auflagerstellen u. s. w. Auch die Bewegungen, die unter dem Einflusse des Eigengewichtes entstehen, können hierher gezählt werden, sobald sie ihrer Grösse nach bekannt sind.

In allen diesen Fällen wird der Einfluss, den die Bewegung des Widerlagers auf die Stabkräfte ausübt, dadurch bestimmt, dass man diese Bewegung auf eine Drehung um einen bestimmten Punkt und mit einem bestimmten Drehwinkel überführt. Dann sucht man die Kraft R, welche imstande ist, diese Drehung hervorzubringen; sie liegt in der Antipolaren des Drehpunktes hinsichtlich der Elastizitätsellipse und ihre Grösse ergibt sich aus der Beziehung $\delta = R r g$. Ist R nach Lage und Grösse gefunden, so unterliegt die Berechnung der Stabkräfte keiner Schwierigkeit mehr.

Unter Umständen mag es ratsam sein, die Bewegung des Widerlagers in eine Drehung, eine lotrechte und eine wagrechte Verschiebung zu zerlegen und die Wirkungen dieser Bewegungen einzeln zu untersuchen. Treten in beiden Widerlagern Bewegungen auf, so kann man deren Wirkungen einzeln berechnen und addieren oder, was einfacher ist, die beiden Bewegungen addieren und daraus die Folgen ableiten.

Beispiel: Das eine Widerlager des in der Nr. 71 behandelten Bogens habe sich, wie durch Messungen gefunden worden ist, während und nach der Ausrüstung des Bogens in der Richtung der Gurtung gesetzt und zwar bei der obern Gurtung um 5 mm, bei der untern um 10 mm. Diese Bewegungen lassen sich durch eine Drehung um den Punkt W (Tafel III) auffassen. Der Drehwinkel ist 10 : 5600 = 0,00178. Dieser Bewegung entspricht eine Kraft R, die in der Antipolaren w von W liegt. Ihre Entfernung von S ist r = 2,90 m. Die Summe der elastischen Gewichte ist g = 0,148 oder, wenn man noch E = 2000 t : cm² hinzufügt, gleich 0,000074. Daraus folgt

$$R = \frac{\delta}{r g} = \frac{0{,}00178}{2{,}90 \,.\, 0{,}000074} = 8{,}3 \text{ t.}$$

Am stärksten werden von dieser Kraft die Stäbe in der Nähe des Widerlagers betroffen. Beispielsweise entsteht im Stabe 1 eine Zugkraft von 75,3 t, im Stabe 2 eine Druckkraft von 81,6 t, in der Strebe 1 2 eine Druckkraft von 5,6 t.

61. Vollwandige Bogen.

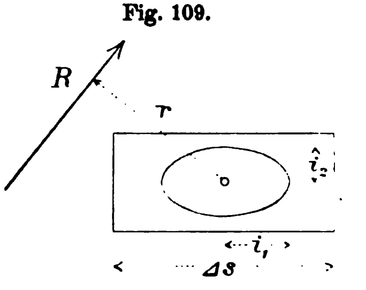
Man zerlegt den Bogen der Pfostenteilung entsprechend in Elemente von der Länge Δs und berechnet für jedes Element das durchschnittliche Trägheitsmoment J des Querschnitts. Wirkt auf ein solches Element die Kraft R ein (Fig. 109), so dreht sich der eine Endquerschnitt gegenüber dem andern um den Winkel $\Delta \delta = \frac{R r \Delta s}{E J}$. (Vgl. Nr. 15.) Wir setzen

$$\Delta g = \frac{\Delta s}{E J}$$

und nennen den Wert Δg das elastische Gewicht des Elementes. Mit diesen Gewichten wird nun wie früher verfahren. Man lässt sie in den Schwerpunkten der Bogenelemente als Kräfte wirken,

erst lotrecht, dann wagrecht. Dadurch gelangt man zu dem Schwerpunkt S und zu den statischen Momenten. Letztere lässt man wieder als Kräfte wirken und bekommt damit die Trägheitsmomente. Ein fünftes Seileck liefert das Zentrifugalmoment der Δg.

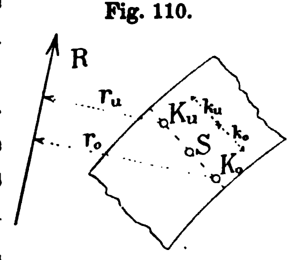
Fig. 109.



Hierbei ist jedoch zu beachten, dass der Formänderungsdrehpunkt nicht im Schwerpunkt des Elementes, sondern im Antipol der Kraft R hinsichtlich der Elastizitätsellipse des Elementes liegt. (Vgl. Teil I, S. 153.) Um diesen Umstand zu berücksichtigen, lässt man die Abschnitte des ersten und des zweiten Seilecks bei den drei folgenden Seilecken nicht in den Schwerpunkten, sondern in den Antipolen der Hauptachsen angreifen, und zwar im dritten Seileck in den Antipolen der y-Achse, im vierten und fünften Seileck in denen der x-Achse.

Wie die Elastizitätsellipsen von Balkenelementen gezeichnet werden, ist auf S. 87 sowie im III. Teil, S. 262 erkärt worden. Über die Bestimmung der Antipole siehe S. 89. Geht eine der Hauptachsen nahe am Schwerpunkt des Elementes vorbei, so fällt der Antipol weit abseits; in diesem Falle halbiert man das Gewicht Δg und lässt die Kräfte in sämtlichen Seilecken in den Endpunkten des zu dieser Achse konjugierten Durchmessers angreifen. Im übrigen gelten zur Bestimmung der Auflagerdrücke für Einzellasten die Betrachtungen und Regeln der Nr. 55.

Fig. 110.



Die Berechnung der innern Kräfte gestaltet sich am bequemsten, wenn man die Spannungen in den äussersten Kanten des Querschnitts als Unbekannte ansieht. Man unterscheidet σ_o für die obere und σ_u für die untere Kante. Zur Berechnung dieser Spannungen benutzt man die „Kernformel". (Vgl. Teil I, S. 56.) Bedeutet r den Hebelarm der äussern Kraft hinsichtlich des Kernpunktes und k den Abstand des Kernpunktes vom Schwerpunkt, so ist (Fig. 110)

$$\sigma_o = \frac{R \cdot r_o}{F \cdot k_o} \text{ und } \sigma_u = \frac{R \cdot r_u}{F \cdot k_u}.$$

Der untern Kante entspricht stets der obere Kernpunkt, der obern Kante der untere Kernpunkt. Die Hebelarme werden in der Zeichnung abgegriffen. Die Kernhalbmesser k leitet man aus den Trägheitsmomenten des Querschnitts ab; es ist $k = \frac{J}{F.e}$, worin e = Entfernung der äussersten Kante vom Schwerpunkt ist. Bei symmetrischen Querschnitten ist $k_o = k_u$.

Um den Einfluss des Eigengewichtes zu bestimmen, zeichne man die Drucklinie ein. (Vgl. Nr. 57.) Die Strahlen des Kraftecks sind die äussern Kräfte R; ihre Hebelarme werden in der Zeichnung abgemessen.

Den Einfluss der zufälligen Last ermittelt man mittels Einflusslinien. Man stellt über jedem Pfosten die Last P auf, zerlegt sie in R und R' und wendet für jeden Schnitt die Kernformel an. Die berechneten σ bilden die Ordinaten der Einflusslinien. Im wesentlichen gleicht dieser Weg dem auf S. 215 als „drittes Verfahren" beschriebenen; auch die daselbst empfohlene Tabelle kann als Muster benutzt werden, nur ist statt a das Produkt Fk und statt S die Spannung σ zu setzen. Ferner sind stets untere und obere Kante zu unterscheiden. Auch der Einfluss der Wärmeschwankung wird mittels der Kernformel berechnet. Zum Schluss addiert man die verschiedenen Spannungen und kann nun beurteilen, ob der Bogen die erforderliche Tragfähigkeit besitzt. —

Soll für einen gegebenen Querschnitt die Scherspannung und die Nietkraft berechnet werden, so zeichnet man die Einflussfläche für die Querkraft Q, indem man die Auflagerdrücke R der einzelnen Lasten parallel und senkrecht zur Bogenachse zerlegt und die letzteren Teilkräfte von einer Grundlinie aus aufträgt. Hieraus lässt sich das Maximum von Q bestimmen. Dann ist, I-förmiger Querschnitt vorausgesetzt, angenähert die Scherspannung $\tau = \frac{Q}{F_s}$, worin F_s = Querschnittsfläche des Steges, und die Nietkraft $N = \frac{Q.e}{h}$, worin e = Nietentfernung und h = Steghöhe.

Will man zur Berechnung vollwandiger Bogen das ältere Verfahren einschlagen, so gelten die in der Nr. 64 besprochenen Massnahmen. Zunächst zeichnet man die Kämpferdruck- und Umhüllungslinien; dann bestimmt man durch Tangenten, die man aus den

Kernpunkten an die Umhüllungskurven legt, die Grenzen der ungünstigsten Belastungen; hierauf setzt man die Einzeldrücke zusammen und berechnet aus der Mittelkraft die Spannungen nach der Kernformel.

62. Unsymmetrische Bogen.

Die Figur 111 zeigt, wie ein unsymmetrischer Bogen zu behandeln ist; gegenüber einem symmetrichen ändert sich das Verfahren nicht wesentlich.

Zunächst werden, wie früher, für sämtliche Gurtstäbe die elastischen Gewichte

$$\Delta g = \frac{s}{E F a^2}$$

berechnet; ihre Summe sei g. Mit diesen Gewichten wird ein Krafteck (Pol O_1) und das erste Seileck $A_1 B_1$ gezeichnet; die Polweite wird am besten gleich g angenommen. Der Schnittpunkt S_1 der äussersten Seilseiten bestimmt die lotrechte Schwerlinie.

Mit demselben Krafteck wird das zweite Seileck $A_2 B_2$ gezeichnet, jedoch laufen hier die Seiten senkrecht zu den Strahlen. Als Polweite wählt man, um grössere Genauigkeit zu erzielen, eine kleinere Länge g'. Die äussersten Seilseiten bestimmen die wagrechte Schwerlinie.

Im dritten Seileck $A_3 B_3$ wirken die Abschnitte des ersten Seilecks als Kräfte; die Polweite c_1 wird beliebig angenommen. Der Abstand der äussersten Seiten sei t_1. Dann ist das Trägheitsmoment für die lotrechte Schwerlinie $J_1 = g c_1 t_1$; zugleich ist $J = g i_1^2$, folglich

$$i_1 = \sqrt{c_1 t_1}.$$

Ein Halbkreis über c_1 und t_1 (Fig. 111 rechts) führt demnach zu den lotrechten Tangenten an die Elastizitätsellipse.

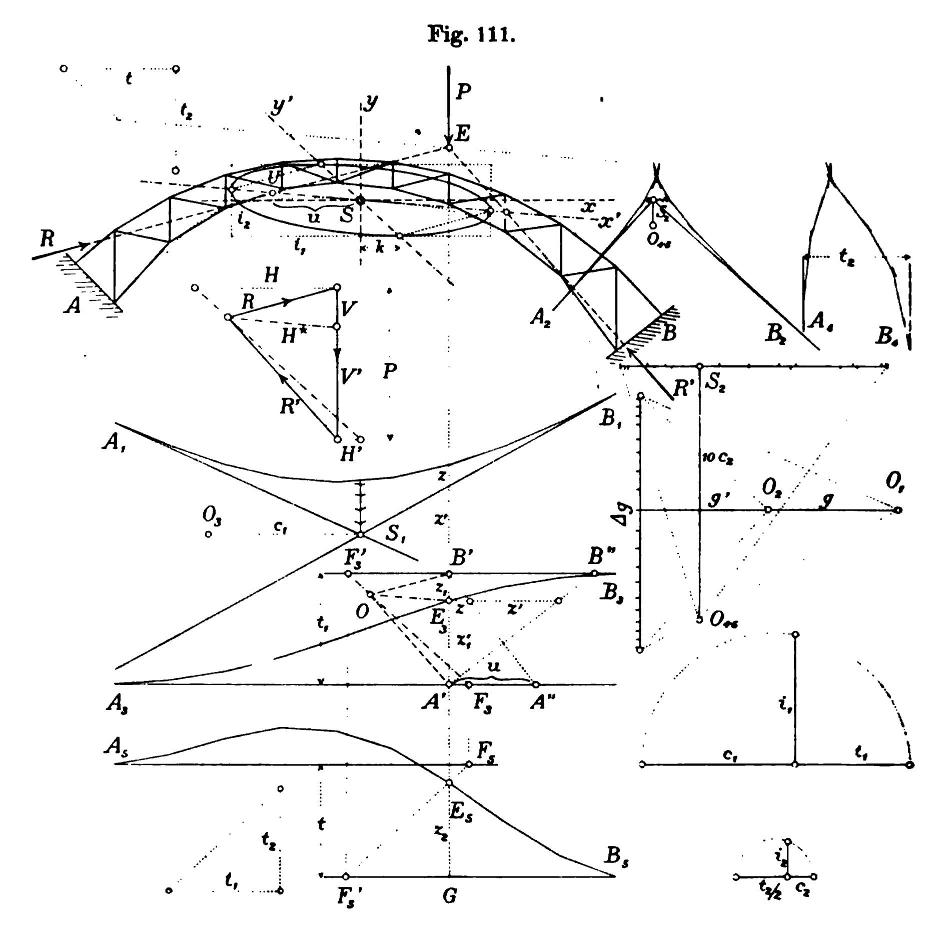
In gleicher Weise betrachtet man die Abschnitte im zweiten Seileck als wagrechte Kräfte und zeichnet damit das Seileck $A_4 B_4$. Der Gesamtabschnitt t_2 entspricht dem Trägheitsmoment für die wagrechte Achse, und zwar ist $J_2 = g' c_2 t_2$; zugleich ist $J_2 = g i_2^2$, woraus folgt

$$i_2 = \sqrt{c_2 \frac{g' t_2}{g}}.$$

Macht man beispielweise $g' = g/2$, so führt ein Halbkreis über c_2 und $t_2/2$ zu dem Trägheitshalbmesser i_2.

Damit sind vier Tangenten an die Elastizitätsellipse bestimmt; da aber die Ellipse unsymmetrisch ist, so müssen wir noch ein weiteres Element bestimmen. Als solches wählen wir den zur

Fig. 111.



x-Achse konjugierten Durchmesser oder, was auf dasselbe hinausgeht, den Abstand k des Berührungspunktes der wagrechten Tangente von der y-Achse.

Nach der Theorie der Trägheitsellipse ist nämlich das Zentrifugalmoment der Bogengewichte in Bezug auf die beiden Hauptachsen $C = g\,i_2\,k$. Dieses Zentrifugalmoment wird uns durch das fünfte Seileck $A_5\,B_5$ geliefert, welches entsteht, wenn man die Ab-

schnitte des zweiten Seilecks als lotrechte Kräfte wirken lässt. Die Seiten des fünften Seilecks laufen demnach senkrecht zu den Strahlen aus O_5. Infolge der Unsymmetrie fallen hier die äussersten Seiten nicht zusammen. Nennt man ihre Entfernung t, so ergibt sich das Zentrifugalmoment des ganzen Bogens $C = g' c_2 t$. Durch Gleichsetzung der beiden Werte für C folgt

$$k = \frac{g' c_2 t}{g i_2} = \frac{i_2 t}{t_2}$$

oder

$$i_2 : k = t_2 : t.$$

Bildet man (Fig. 111 links oben) aus t und t_2 ein rechtwinkliges Dreieck, so läuft dessen Hypothenuse parallel zu dem gesuchten konjugierten Durchmesser. Zieht man ferner durch den Berührungspunkt der wagrechten Tangente eine Parallele zur Diagonale des Tangentenrechtecks, so bekommt man aus geometrischen Gründen den Berührungspunkt der lotrechten Tangente, womit auch die Richtung des zur y-Achse konjugierten Durchmessers bestimmt ist.

Hiernach kann die Elastizitätsellipse nach geometrischen Regeln leicht gezeichnet werden. Die beiden konjugierten Durchmesser wollen wir die x'- und die y'-Achse nennen.

Das erste, dritte und fünfte Seileck liefern uns nun, wie früher, die elastischen Formänderungen, die der Bogen unter der Last P erleidet. Hält man den Bogen am rechtsseitigen Ende fest, lässt ihn am linken Ende frei schweben und verbindet das linke Ende mit dem Punkte S durch einen unelastischen Stab, so erfährt S eine Drehung

$$\delta = P g z,$$

eine lotrechte Verschiebung

$$v = P g c_1 z_1$$

und eine wagrechte Verschiebung

$$h = P g' c_2 z_2.$$

(Vgl. S. 203—204.) Diese Formänderungen muss der linke Auflagerdruck R rückgängig machen.

Wir zerlegen zunächst R in eine gleichgrosse, parallele, durch S gehende Kraft und ein Kräftepaar vom Momente M; dann besorgt letzteres den Rückgang der Drehung; denn M ist eine in der

unendlich fernen Geraden liegende Kraft, deren Antipol also mit dem Schwerpunkte S zusammenfällt. Hieraus bekommt man

$$\delta = M . g$$

oder, genau wie früher,

$$M = P . z .$$

Wir zerlegen ferner die durch S gehende Kraft R in zwei Teilkräfte V und H^*, die eine parallel zur y-Achse, die andere parallel zur x'-Achse. Dann bewirkt letztere eine Drehung um den unendlich fernen Punkt der y-Achse, also eine wagrechte Verschiebung. Hieraus folgt, dass die lotrechte Verschiebung v allein von der Kraft V verrichtet werden muss. Es ist daher

$$v = V g i_1^2 = V g c_1 t_1$$

oder, wenn man die beiden Ausdrücke für v einander gleichsetzt

$$V = \frac{P z_1}{t_1} .$$

Zerlegt man sodann R in eine Kraft H parallel zur x-Achse und eine Kraft V^* parallel zur y'-Achse, so ergibt letztere eine lotrechte Verschiebung, folglich übernimmt H die Beseitigung von h, woraus folgt

$$h = H g i_2^2 = H g' c_2 t_2$$

oder

$$H = \frac{P z_2}{t_2} .$$

Wie man sieht, ergeben sich auf Grund dieser Betrachtungen ganz die nämlichen Ausdrücke für M, V und H wie bei symmetrischen Bogen, nur haben die Buchstaben V und H eine etwas abweichende Bedeutung; sie bezeichnen nicht kurzweg die lotrechte und die wagrechte Komponente von R, sondern entstehen durch Zerlegung der Kraft R parallel zur y- und x'-, bezw. parallel zur x- und y'-Achse. In der Fig. 111 ist die Zerlegung in diesem Sinne vorgenommen worden.

Behandelt man in derselben Weise den rechtsseitigen Auflagerdruck R', so ergeben sich die Ausdrücke

$$M' = P z' ,$$

$$V' = \frac{P z_1'}{t_1} ,$$

$$H' = \frac{P z_2'}{t_2} .$$

Der Unterschied zwischen den z und z' besteht darin, dass erstere von den Endseiten, letztere von den Anfangsseiten der drei Seilecke aus gemessen werden.

Will man nun die beiden Auflagerdrücke nach Lage und Richtung zeichnen, so verfährt man ähnlich wie früher. Man wählt den Massstab des Kraftecks PRR' so, dass P gleich t_1 wird und verlegt es in das dritte Seileck. Dann deckt sich V mit z_1 und V' mit z_1'. Ferner wird jetzt $H = \frac{t_1 z_2}{t_2}$ und $H' = \frac{t_1 z_2'}{t_2}$. Um diese Grössen zu finden, zeichnet man (links unten) ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten t_1 und t_2, zieht im fünften Seileck durch E_5 eine Parallele zur Hypothenuse und lotet die Schnittpunkte auf den Endseiten, F_5 und F_5', in das dritte Seilpolygon hinauf. Dann ist $F_3'B' = H$ und $A'F_3 = H'$. Verbindet man die Punkte F_3 und F_3' durch eine Gerade und zieht zugleich durch E_3 eine Parallele zur x'-Achse, so erhält man eine dem Krafteck PRR' ähnliche Figur. Für den Fall, dass $P = t_1$ ist, stellen also die Linien OA' und OB' die beiden Auflagerdrücke dar.

Um schliesslich die Kräfte R und R' auch der Lage nach zu finden, denkt man sich R im Punkte U parallel zur y- und zur x'-Achse zerlegt, dann bekommt man die Beziehung $Vu = M$ oder

$$u = \frac{z\,t_1}{z_1}.$$

Die Strecke u wird gefunden, wenn man die Strecke z im ersten Seileck abgreift, im Punkte E_3 wagrecht aufträgt und durch ihren Endpunkt die Linie $B'A''$ zieht. Überträgt man u schliesslich nach oben, so erhält man den auf der x'-Achse liegenden Punkt U. Dasselbe kann mit dem rechten Auflagerdruck geschehen. Zwei Parallele durch U und U' zu den Strahlen OA' und OB' liefern jetzt die Auflagerdrücke der Lage nach. Hat man richtig gearbeitet, so schneiden sich die beiden Parallelen auf der Richtungslinie der Last P.

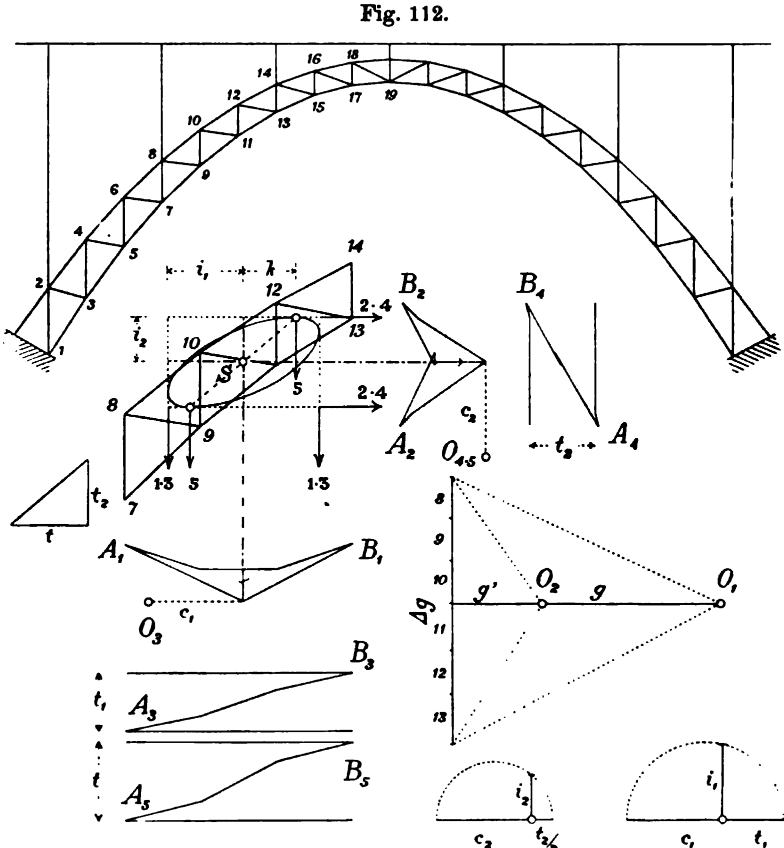
Führt man diese Arbeit für eine Reihe von Einzellasten durch, so bekommt man, wie früher, die Kämpferdrucklinie und die Umhüllungskurven.

Hinsichtlich der Einflusslinien für die Stabkräfte gilt das in der Nr. 58 Gesagte.

63. Verfahren bei grosser Stabzahl.

Bei Bogen mit grosser Spannweite wird in der Regel nur über jedem zweiten oder dritten Knotenpunkte ein Fahrbahnpfosten aufgestellt. (Fig. 112.) In diesem Falle gestaltet sich die Zeichnung der Elastizitätsellipse bequemer und genauer, wenn man den Bogen,

Fig. 112.



der Pfostenteilung entsprechend, in eine beschränkte Anzahl Stücke zerlegt und zunächst die Trägheitsmomente für jedes Bogenstück bestimmt.

Den Bogen der Fig. 112 z. B. teilt man in sechs Stücke. Für das zweite Bogenstück ist der Gang der Arbeit dargestellt. Man führt sie am besten in vergrössertem Massstabe (in unserer Figur

in doppelter Grösse) durch. Die Gewichte $\varDelta g_8$ bis $\varDelta g_{13}$ werden wie gewöhnlich als Kräfte aufgetragen und mit dem Pole O_1 zum Seileck $A_1 B_1$, mit dem Pole O_2 zum Seileck $A_2 B_2$ verbunden. Hieraus ergeben sich der Schwerpunkt S des Bogenstückes und die zwei Schwerlinien. Die Abschnitte der einzelnen Seilseiten bilden sodann die Kräfte für die übrigen Seilecke. Der Gesamtabschnitt des dritten Seilecks sei t_1, derjenige des vierten t_2. Dann ist wie oben $i_1 = \sqrt{c_1\, t_1}$ und $i_2 = \sqrt{\frac{g'\, c_2\, t_2}{g}}$. Macht man das Verhältnis $g' : g$ gleich $\frac{1}{8}$, so wird einfacher $i_2 = \sqrt{c_2 \,.\, \frac{1}{8}\, t_2}$. Damit sind die wagrechten Tangenten an die Elastizitätsellipse bestimmt.

Das fünfte Seileck wird mit den Abschnitten des zweiten gezeichnet, seine Seiten laufen jedoch senkrecht zu den Strahlen aus O_5. Dieses Seileck liefert uns das Zentrifugalmoment der Gewichte, und zwar ist, wenn t den Abstand der Endseiten bezeichnet, das Zentrifugalmoment $C = g' \,.\, c_2 \,.\, t$. Bezeichnet man die Entfernung des Berührungspunktes der wagrechten Tangente von der y-Achse mit k, so ist nach der Theorie der Trägheitsellipse auch $C = g \,.\, i_2 \,.\, k$. Hieraus folgt, wenn man noch obigen Ausdruck für i_2 berücksichtigt, $t : t_2 = k : i_2$. Bildet man aus t und t_2 ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 112 links) und zieht durch S eine Parallele zur Hypothenuse, so werden die Berührungspunkte der wagrechten Tangente abgeschnitten. Zugleich stellt diese Parallele den zur x-Achse konjugierten Durchmesser dar.

Damit ist die Ellipse des Bogenstückes vollständig bestimmt. Die Ellipse selbst zu zeichnen, kann man sich ersparen, da für die Folge die vier Tangenten und die Berührungspunkte ausreichen.

Diese Arbeit wird nun zunächst für jedes einzelne Bogenstück durchgeführt, wobei man sich, wenn der Bogen symmetrisch ist, auf die Hälfte beschränkt. Dann fasst man die Stabgewichte gruppenweise zusammen und führt mit den sechs Gruppengewichten die Zeichnung des ganzen Bogens durch. Da jedoch die Gruppengewichte nicht in einem Punkte angreifen, sondern ihre eigenen Ellipsen besitzen, so macht man von dem Satze Gebrauch, dass Trägheits- und Zentrifugalmoment sich gleich bleiben, wenn man in jedem Endpunkte des konjugierten Durchmessers die Hälfte des Gewichtes vereinigt.

Man halbiert demnach jedes der sechs Gruppengewichte und lässt die halben Gewichte in den Endpunkten der konjugierten Durchmesser, bzw. in den Tangenten der einzelnen Ellipsen als Kräfte

wirken. In der Figur ist für das zweite Bogenstück die Richtung und Lage der Kräfte durch Pfeile deutlich gemacht. Im ersten und dritten Seileck wirken die Kräfte in den lotrechten Tangenten, im zweiten und vierten in den wagrechten Tangenten, und für das fünfte Seileck bilden die Berührungspunkte der wagrechten Tangenten die Angriffspunkte. Im übrigen verläuft die Arbeit genau so, wie sie in der vorigen Nummer beschrieben worden ist.

Durch diese Teilung des Bogens in einzelne Stücke wird die Zeichnungsarbeit zwar etwas vergrössert, man überzeugt sich jedoch bald, dass dadurch eine grössere Genauigkeit erzielt wird, als nach dem ursprünglichen Verfahren.

64. Älteres Verfahren.

Nirgends so, wie beim gelenklosen Bogen, ist das von Culmann begründete Rechnungsverfahren, das wir das ältere nennen, am Platze. Mag es auch an Übersichtlichkeit dem neueren Verfahren nachstehen, und für Bahnbrücken mit ihren unregelmässigen Verkehrslasten ungeeignet sein, so erweist es sich doch für Strassenbrücken immer noch seiner Kürze wegen als vorteilhaft.

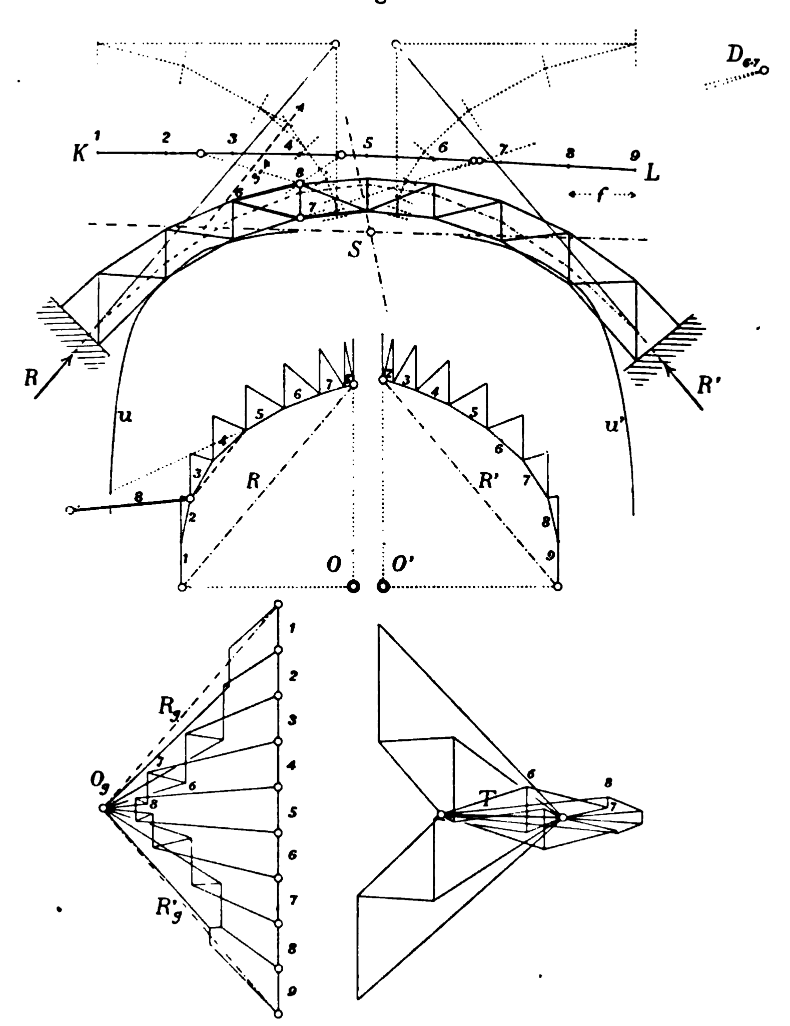
Das Verfahren stützt sich wie das neuere auf das Zeichnen der fünf Seilecke (Nr. 55), verwendet jedoch in der Folge die in der Nummer 56 abgeleiteten Kämpferdruck- und Umhüllungskurven.

Eigengewicht.

An der Hand der Kämpferdrucklinie KL (Fig. 113) und der beiden Umhüllungskurven u und u' zeichnet man für die neun Einzellasten die Auflagerdrücke und setzt sie zu zwei Kraftecken zusammen. Man trägt zuerst die Last P_1 auf, die keiner Zerlegung bedarf, dann fügt man die Last P_2 an und zerlegt sie parallel zu den zwei Tangenten die aus 2 an die Kurven u gelegt werden können. Dann fügt man die Last P_3 an und zerlegt sie in gleicher Weise. So gelangt man zu dem Krafteck der linksseitigen Auflagerdrücke. Die Mittelkraft aller Einzeldrücke ist die Kraft R. Ihre Lage wird durch ein Seileck bestimmt, das in der Figur oberhalb des Bogennetzes gezeichnet ist. Der Pol O wird nach Gutdünken gewählt. Nach bekanntem Gesetze geht R durch den Schnittpunkt der äussersten Seilseiten.

In derselben Weise zeichnet man ein Kraft- und ein Seileck für die rechtsseitigen Auflagerdrücke, deren Mittelkraft R' ist. Bei symmetrischer Bogenform werden die beiden Kraft- und Seilecke kongruent.

Fig. 113.



Für P wählt man am besten die auf einen Pfosten treffende zufällige Last, also $P = pf$. Die Kräfte R und R' stellen demnach die Auflagerdrücke für die zufällige Last dar; diejenigen für Eigen-

gewicht ergeben sich hieraus durch Multiplikation mit $g:p$; es ist also

$$R_g = R_g' = \frac{g}{p} R \cdot$$

(Vgl. hiermit Nr. 28.) Nun trägt man (Fig. 113 links unten) die neun Eigengewichtslasten lotrecht auf, fügt die Kräfte R_g und R_g' an, bekommt hieraus den Pol O_g und zeichnet damit die Drucklinie für Eigengewicht. (Über deren Verlauf vgl. S. 209.)

Um die Stabkräfte für Eigengewicht zu erhalten, zeichnet man einen Cremona'schen Kräfteplan. Man beginnt ihn, indem man die Kraft R nach dem Schnittverfahren in die drei ersten Stabrichtungen zerlegt und in gewohnter Weise weiter arbeitet. Bei grosser Stabzahl ist es ratsam, einzelne Gurtstäbe nach dem Momentenverfahren zu berechnen, um von Zeit zu Zeit eine Probe zu erhalten. Auch empfiehlt es sich, die Zerlegung an den beiden Auflagern zu beginnen, und gegen den Scheitel hin zu arbeiten. Bei symmetrischer Bogenform beschränkt man den Plan auf die Hälfte. Im übrigen gelten die Regeln und Ratschläge der Nr. 57.

Die Berechnung der Eigengewichtskräfte gibt nebenbei Aufschluss darüber, ob bei der zufälligen Last die grösste Zug- oder die grösste Druckkraft überwiegt. Denn da sich die beiden ungünstigsten Belastungen stets zur vollen Belastung ergänzen, die Stabkraft der letzteren aber denselben Sinn hat wie die Eigengewichtskraft, so hat auch die grössere der beiden Grenzkräfte gleiches Vorzeichen wie die Eigengewichtskraft.

Ist das Eigengewicht ungleichförmig verteilt, so müssen die Auflagerdrücke für Eigengewicht und zufällige Last getrennt gezeichnet werden; man erhält dann vier statt zwei Kraftecke.

Zufällige Belastung.

Zunächst bestimmt man die Grenzen der ungünstigsten Belastungen, indem man von den Drehpunkten der Stäbe aus Tangenten an die Umhüllungskurven zieht und die Kämpferdrucklinie anschneidet. (Vgl. Nr. 56.) Für den Untergurtstab 8 z. B. ergibt sich der grösste Zug, wenn die Pfosten 3 bis 4 belastet sind. Die Mittelkraft der ausserhalb des Schnittes wirkenden Kräfte wird gefunden, wenn man die linksseitigen Auflagerdrücke für die genannten Pfosten zusammensetzt. Die Grösse der Kraft ergibt sich

aus dem Krafteck der linken Auflagerdrücke, ihre Lage findet man, wenn (Fig. 113 oben) die einschliessenden Seilseiten zum Schnitt gebracht werden. Diese Mittelkraft ist in der Figur durch einen Pfeil und die Zahlen 3-4 angedeutet. Um die gesuchte Stabkraft zu bekommen, zerlegt man die Kraft nach dem Schnittverfahren in zwei Teilkräfte, von denen die eine im Stabe 8 liegt, die andere durch dessen Drehpunkt geht. Die Stabkraft ist etwas stärker ausgezogen und mit der Zahl 8 versehen.

Will man auch die grösste Druckkraft im Stabe 8 bestimmen, so hat man den Bogen von 1 bis 2 und von 5 bis 9 zu belasten und in ähnlicher Weise zu verfahren; doch lässt sich ein einfacherer Weg einschlagen. Die Summe beider Grenzkräfte ist nämlich gleich der Eigengewichtskraft, multipliziert mit $p:g$, woraus sich die zweite Grenzkraft

$$S_p' = \frac{p}{g} S_g - S_p$$

ergibt. (Vgl. S. 112.)

Für den Obergurtstab 7 erstreckt sich die ungünstigste Belastung für Druck von 1 bis 6. Hier fällt der Querschnitt in die belastete Strecke hinein. Man hat daher die Belastung zu teilen, für die Lasten 1 bis 3 den rechtsseitigen, für die Lasten 4 bis 6 den linksseitigen Auflagerdruck zu bestimmen, beide zusammenzusetzen und die Mittelkraft in die geschnittenen Stabrichtungen zu zerlegen. Bequemer und rascher gelangt man zum Ziele, wenn man zuerst die grösste Zugkraft des Stabes bestimmt. Zu diesem Zwecke belastet man den Bogen von 7 bis 9. Die ausserhalb des Schnittes wirkende Kraft wird im linken Krafteck der Grösse und Richtung nach, im linken Seileck der Lage nach gefunden. Hierauf wird die Kraft wie üblich in zwei Kräfte zerlegt, von denen die eine im Stabe 7 liegt, während die andere durch dessen Drehpunkt geht. Schliesslich findet man die grösste Druckkraft nach der Formel

$$S_p = \frac{p}{g} S_g - S_p'.$$

Für die Strebe 6/7 erhält man den grössten Zug durch Belastung der Pfosten 4 bis 6. Der linke Auflagerdruck dieser Lasten bildet die ausserhalb wirkende Kraft. Er wird wiederum mittels des Kraftecks der Grösse nach, mittels des linken Seilecks der Lage nach bestimmt und hierauf in die Stabrichtungen zerlegt. Die grösste Druckkraft bekommt man mit Hilfe obiger Formel.

Die Arbeit wird etwas erleichtert, wenn man zuerst für sämtliche Stäbe die Grenzen der ungünstigsten Belastungen bestimmt und sie in einem graphischen „Belastungsschema" übersichtlich zusammenstellt.

Wärmeschwankungen.

Die Temperaturkraft geht nach früher (Nr. 59) durch den Schwerpunkt der elastischen Gewichte und ist, symmetrische Bogenform vorausgesetzt, gleich $T = \frac{\alpha t l}{g i_2^2}$. Die Stabkräfte, die hieraus entstehen, lassen sich leicht durch einen Cremona-Plan bestimmen. (Vgl. S. 224.)

Zum Schlusse der Arbeit wird man in der Regel die gefundenen Kräfte in einer Tabelle übersichtlich zusammenstellen und unter Berücksichtigung der Vorzeichen addieren. Die Temperaturkräfte führt man in der Regel mit $\pm$ ein. Nützlich ist es, die Kräfte auch graphisch aufzutragen. Einmal werden hierdurch etwaige Fehler leichter erkannt, sodann lässt sich das Interpolieren von ausgelassenen Kräften sicherer und richtiger vornehmen als bei der Zahlenrechnung; auch die Ableitung der einen Grenzkraft aus der andern gestaltet sich zeichnerisch übersichtlicher und bequemer. (Vgl. Nr. 71 und Tafel III.)*)

65. Bogen mit konstantem Trägheitsmoment.

Wir gehen, wie in der Nr. 32, von der Annahme aus, dass das Trägheitsmoment des Bogenquerschnitts der Sekante des Neigungswinkels der Bogenachse proportional sei, $J = \frac{J_0}{\cos \alpha} = J_0 . \frac{d s}{d x}$. Nach dieser Annahme ist das Trägheitsmoment im Scheitel am kleinsten und nimmt gegen die Kämpfer hin langsam zu, was mit der Wirklichkeit meistens besser übereinstimmt, als die Annahme eines ganz konstanten Trägheitsmomentes. Hieran fügen wir die zweite, ebenfalls in der Wirklichkeit meist zutreffende Annahme, dass die Bogenachse eine ziemlich flache Parabel sei. Hiernach lautet die Gleichung

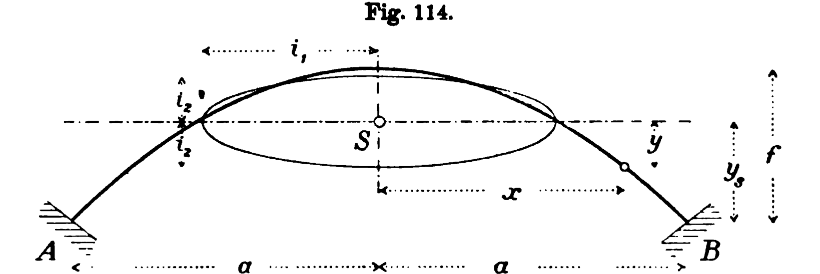
*) Ausführlicheres über das ältere Verfahren zur Berechnung von gelenklosen Bogenträgers siehe in des Verfassers „Der elastische Bogen, berechnet mit Hilfe der Graphischen Statik." Zürich 1886.

der Bogenachse bezogen auf den Schwerpunkt S der elastischen Gewichte (Fig. 114)

$$y = f - y_s - \frac{f x^2}{a^2}.$$

Auf Grund dieser Annahmen ergeben sich einige einfache mathe-

Fig. 114.



matische Beziehungen, welche die statische Berechnung eines gelenklosen Bogens unter Umständen wesentlich abkürzen.

Berechnung des Schwerpunktes S.

Wir denken uns den Bogen in unendlich kleine Elemente von der Länge ds zerlegt. Dann ist das elastische Gewicht eines Elementes

$$dg = \frac{ds}{EJ} = \frac{dx}{EJ_0}$$

und

$$g = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{EJ_0} = \frac{2a}{EJ_0}.$$

Die Ordinate des Schwerpunktes dieser Gewichte ergibt sich aus der Gleichung $g \cdot y_s = \int dg \cdot (y + y_s)$. Setzt man für y und dg obige Werte ein und integriert von $-a$ bis $+a$, so ergibt sich

$$y_s = 2/3 f,$$

somit die Gleichung der Bogenachse

$$y = 1/3 f - \frac{f x^2}{a^2}.$$

Elastizitätsellipse.

Nennt man die Halbachsen der Elastizitätsellipse i_1 und i_2 (Nr. 54), so ist das Trägheitsmoment sämtlicher Gewichte bezogen

auf die y-Achse $g \cdot i_1^2 = \int dg \cdot x^2$, woraus folgt

$$i_1 = \sqrt{1/3}\, a.$$

Bei der Berechnung von i_2 muss man die Elastizitätsellipse des einzelnen Elementes in Berücksichtigung ziehen. Die senkrechte Achse dieser Ellipse ist $i = \sqrt{J:F}$, worin F den Flächeninhalt des Bogenquerschnitts bedeutet. Das Trägheitsmoment des elastischen Gewichtes bezogen auf die x-Achse ist daher gleich $dg \cdot (y^2 + i^2)$, wobei man genau genug i als konstant ansehen darf. Somit ist $g \cdot i_2^2 = \int dg \cdot (y^2 + i^2)$, woraus folgt

$$i_2 = \sqrt{4/45\, f^2 + i^2}.$$

Kämpferdruck- und Umhüllungskurven.

Die Richtung und Grösse des Auflagerdruckes R für eine einzelne Last P wird nach früher (Nr. 55) mit Hilfe der Ordinaten der Seilecke 1, 3 und 5 gefunden. Das erste Seileck (Fig. 115) entsteht, wenn man die Gewichte dg als lotrechte Kräfte wirken lässt; z stellt demnach das statische Moment der Gewichte von p bis a gemessen dar. Als Polweite wählt man g. Folglich ist $g \cdot z = \int_p^a dg \cdot (x - p)$, woraus sich ergibt

$$z = \frac{(a - p)^2}{4\, a}.$$

Das dritte Seileck entsteht, wenn man die Abschnitte des ersten Seilecks als lotrechte Kräfte ansieht und zusammensetzt. Die zweite Polweite sei c_1. Dann ist $g \cdot c_1 \cdot z_1 = \int_p^a dg \cdot x(x - p)$, woraus folgt

$$z_1 = \frac{(a - p)^2 \cdot (2\, a + p)}{12\, a\, c_1}.$$

Für $p = -a$ wird $z_1 = t_1 = \dfrac{a^2}{3\, c_1}$, folglich

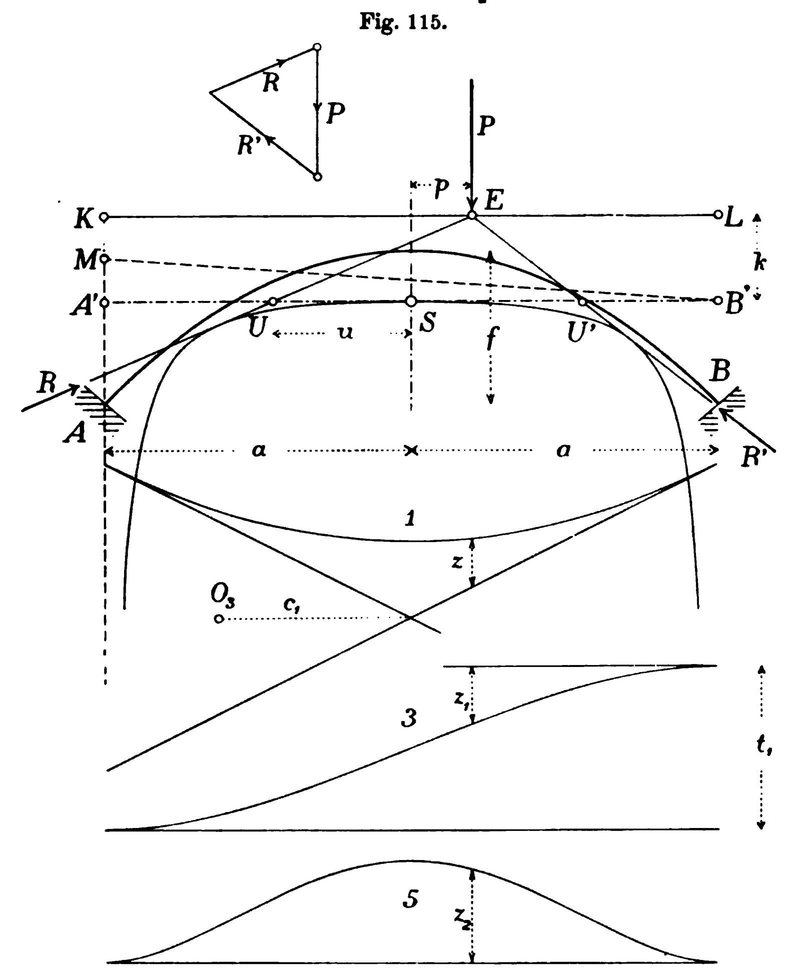
$$z_1 = \frac{(a - p)^2 \cdot (2\, a + p)\, t_1}{4\, a^3}.$$

Im fünften Seileck wirken die statischen Momente bezogen auf die x-Achse als Kräfte; die erste Polweite ist g', die zweite c_2, folglich ist

$g' . c_2 . z_2 = \int_p^a dg . y(x - p)$. Berücksichtigt man noch, dass nach S. 200 $i_2^2 = \frac{g' c_2 t_2}{g}$, so folgt

$$z_2 = \frac{(a^2 - p^2)^2 f t_2}{24 a^3 i_2^2}.$$

Fig. 115.



Zerlegt man den linksseitigen Auflagerdruck R in die Komponenten V und H, so ist (S. 202) $V = \frac{P z_1}{t_1}$ und $H = \frac{P z_2}{t_2}$, also

$$\frac{V}{H} = \frac{z_1 t_2}{z_2 t_1} = \frac{6(2a + p) i_2^2}{(a + p)^2 f}.$$

Ferner ist die Abszisse des Punktes U, in welchem die x-Achse von R geschnitten wird, nach S. 206

$$u = \frac{z\,t_1}{z_1} = \frac{a^2}{2\,a + p}.$$

Nennt man die Ordinate der Kämpferdrucklinie k, so verhält sich $k : (u + p) = V : H$, woraus folgt

$$k = \frac{6\,i_2{}^2}{f} = \frac{8}{15} f + \frac{6\,i^2}{f}.$$

Die Kämpferdrucklinie wird, wie man sieht, eine gerade Linie.

Die Gleichung der Linie UE lautet $y = \frac{u + x}{u + p} k$ oder

$$(a + p)^2 y = a^2 k + (2\,a + p)\,k\,x.$$

Fasst man in dieser Gleichung p als veränderlichen Parameter auf, differenziert sie nach diesem und eliminiert sodann p aus beiden Gleichungen, so erhält man die Gleichung der Kurve, welche der Auflagerdruck R bei veränderlicher Stellung der Last umhüllt. Die Differenzierung führt zur Gleichung $2(a+p)\,y = k\,x$ und die Elimination von p zu

$$k\,x^2 + 4\,a\,x\,y + 4\,a^2 y = 0.$$

Diese Gleichung stellt nach den Regeln der analytischen Geometrie eine Hyperbel dar, die durch den Koordinatenursprung S geht. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$(x + a)(k\,x + 4\,a\,y - a\,k) + a^2 k = 0,$$

so erkennt man, dass die Gleichungen

$$x + a = 0 \quad \text{und} \quad k\,x + 4\,a\,y - a\,k = 0$$

die Asymptoten darstellen. Die eine Asymptote ist daher die Lotrechte durch A; die andere wird gefunden, wenn man (Fig. 115) $A'K$ in M halbiert und M mit B' verbindet. Kennt man die beiden Asymptoten und einen Punkt der Hyperbel (Punkt S), so lassen sich bekanntlich beliebige andere Punkte mit Leichtigkeit zeichnen. Die Umhüllungskurve des rechtsseitigen Auflagerdrucks ist natürlich symmetrisch zu der andern.

Horizontalschub für Eigengewicht.

Denkt man sich den ganzen Bogen belastet, so wird, wenn g die Belastung auf die Längeneinheit bedeutet,

$$H_g = 2 \int_0^a g \, . \, d\,p \, . \, \frac{z_2}{t_2} = \frac{2\,g\,f\,a^2}{45\,i_2{}^2}.$$

Setzt man $H_g = \frac{g\,l^2}{8\,f'}$, so ergibt sich die Pfeilhöhe der parabolischen Drucklinie

$$f' = \frac{45\,i_2^{\,2}}{4\,f} = f + \frac{45\,J}{4\,f\,F}.$$

Ferner wird das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf S

$$M = 2\int_0^a g\,.\,dp\,.\,z = \frac{g\,a^2}{6}.$$

Daraus folgt zunächst die Ordinate der Drucklinie im Scheitel gleich

$$\frac{g\,a^2}{12} : \frac{g\,f\,a^2}{45\,i_2^{\,2}} = \frac{15\,i_2^{\,2}}{4\,f} = \frac{1}{3}\,f'.$$

Die Ordinate der Drucklinie im Kämpfer ist daher gleich $2/3\,f'$. Mit anderen Worten, die Drucklinie liegt im Scheitel um $\frac{15\,J}{4\,f\,F}$ oberhalb, im Kämpfer um $\frac{15\,J}{2\,f\,F}$ (lotrecht gemessen) unterhalb der Bogenachse.

Einfluss der zufälligen Last.

Um den Einfluss der zufälligen Last zu bestimmen, zeichnet man auf Grund obiger Regeln die Kämpferdruck- und Umhüllungskurven und zerlegt die auf den Pfosten treffenden Einzellasten in ihre Auflagerdrücke. Hierauf verfährt man wie früher; man zeichnet entweder Einflusslinien nach Nr. 58 oder wendet das ältere Verfahren nach Nr. 64 an. Dass der Bogen konstantes Trägheitsmoment besitzt, trägt zur Vereinfachung der Rechnung wenig bei. Zwar lassen sich auch für den Einfluss der zufälligen Last Formeln ableiten; sie werden aber nicht besonders bequem, so dass der graphische Weg im allgemeinen vorzuziehen ist.

Temperaturkraft.

Nach früher (Nr. 59) geht die Temperaturkraft durch S und ihre Grösse berechnet sich nach der Formel $T = \frac{\alpha\,t\,l}{g\,i_2^{\,2}}$. Setzt man $l = 2\,a$ und berücksichtigt die vorher gefundenen Ausdrücke für g und i_2, so wird

$$T = \frac{45\,\alpha\,t\,E\,J_0}{4\,f^2 + 45\,i^2}.$$

Obige Formeln gelten zunächst für einen vollwandigen Bogen. Sie lassen sich jedoch leicht auf Fachwerkbogen übertragen und geben um so richtigere Resultate, je besser die Bedingung erfüllt ist, dass das Trägheitsmoment des Querschnitts der Sekante des Neigungswinkels proportional ist. Man hat in diesem Falle in obiger Formel J durch $\frac{1}{2} F_g h^2$ und F durch $2 F_g$ zu ersetzen, worin F_g die (durchschnittliche) Querschnittsfläche einer Gurtung bedeutet.

66. Vorläufige Berechnung eines Bogenträgers.

Alle bisherigen Entwicklungen setzten voraus, dass die Querschnittsmasse des zu berechnenden Bogens bekannt seien. Dies ist der Fall, wenn ein Bogen berechnet werden soll, der bereits besteht, oder der im Entwurfe vorliegt. Handelt es sich aber um ein neues Bauwerk, von dem nichts als das Stabnetz und die Belastungen bekannt sind, so muss der endgültigen Berechnung im allgemeinen eine vorläufige oder angenäherte vorangehen. Man verfährt hierbei je nach Umständen etwas verschieden.

Ist die Höhe des Bogens, d. h. der Abstand beider Gurtungen ganz oder nahezu konstant, so ist es am besten, das in der Nr. 65 beschriebene Rechnungsverfahren anzuwenden; die Ergebnisse weichen in diesem Falle nicht stark von den richtigen ab.

Besitzt aber der Bogen stark wechselnde Höhe, so setzt man die Querschnittsflächen sämtlicher Gurtungsstäbe vorläufig gleich 1, zeichnet hierauf die fünf Seilpolygone der Fig. 94 und verfährt nach den in den Nrn. 55 und 56 angegebenen Regeln. Selbstverständlich ist dieser letztere Weg umständlicher. Man kann dabei das ältere oder neuere Verfahren einschlagen, aber man wird im allgemeinen das erstere vorziehen, da das letztere verhältnismässig mehr Zeit braucht. Selbst bei Eisenbahnbrücken wird für die vorläufige Berechnung das ältere Verfahren mit Vorteil angewandt, indem man für die zufällige Last eine passende „Gleichwertbelastung“ einführt. Die Berechnung der Strebenkräfte lässt man vorläufig beiseite, da man die Strebenquerschnitte für die zweite Berechnung nicht nötig hat. Man kann sich die Arbeit vielfach dadurch abkürzen, dass man bloss jeden zweiten oder dritten Gurtstab berechnet und die Kräfte der zwischenliegenden durch Interpolation bestimmt.

Um die Temperaturkraft zu ermitteln, rechnet man, nachdem die Einflüsse des Eigengewichtes und der zufälligen Last bestimmt sind, die Querschnittsfläche im Scheitel aus. Diese multipliziert man mit der Kraft T, die sich unter der Bedingung Querschnittsfläche gleich 1 ergibt. Wenn man also vorläufig die Querschnittsfläche einer Gurtung gleich F_g erhält, so ist $T = \frac{E \alpha t l F_g}{g i_2^2}$.

Sind auf die beschriebene Weise die Querschnittsmasse des Bogens vorläufig bestimmt, so schreitet man zur endgültigen Berechnung. Sollten sich hierbei wesentlich andere Masse ergeben, so tut man gut, die Berechnung zum dritten Male durchzuführen.

Auch bei vollwandigen Bogen wendet man, wenn sich die Höhe wenig oder gar nicht ändert, die Ergebnisse der vorigen Nummer an. In der Regel ist bei vollwandigen Bogenträgern die Höhe h bekannt; dann ist der Trägheitshalbmesser der Querschnittsfläche annähernd $i = 3/7\,h$. Darnach können Kämpferdruck- und Umhüllungskurven gezeichnet werden.

Da die Querschnittsflächen F zunächst unbekannt sind, so berechnet man nicht die Spannungen σ, sondern die Produkte $F\sigma$ und erhält dann durch Division mit den zulässigen Spannungen die erforderlichen Querschnittsflächen. Die Berechnung ist stets für obere und untere Kante durchzuführen und von den beiden F der grössere Wert zu nehmen.

Bei stark wechselndem Trägheitsmoment ist es ratsam, den allgemeinen Weg einzuschlagen, also die fünf Seilecke zu zeichnen, und auf Grund dieser die Kämpferdruck- und Umhüllungskurven zu bestimmen.

Zur Berechnung der Spannungen für die zufällige Last hat man die Kernpunkte nötig. Der Kernradius k lässt sich annähernd gleich $0{,}37\,h$ setzen. Auch hier wird man in der Regel bloss eine beschränkte Zahl von Querschnitten der Rechnung unterziehen und die übrigen durch Interpolation bestimmen. — Für die Temperaturkräfte gilt das oben Gesagte.

67. Wagrechte Belastungen.

Wagrechte Belastungen treten bei Brücken infolge des Bremsens der Eisenbahnzüge auf. Bei Dachstühlen könnte man den Wind als wagrechte Last auffassen, doch wendet man hier besser die Betrachtungen der Nr. 69 an.

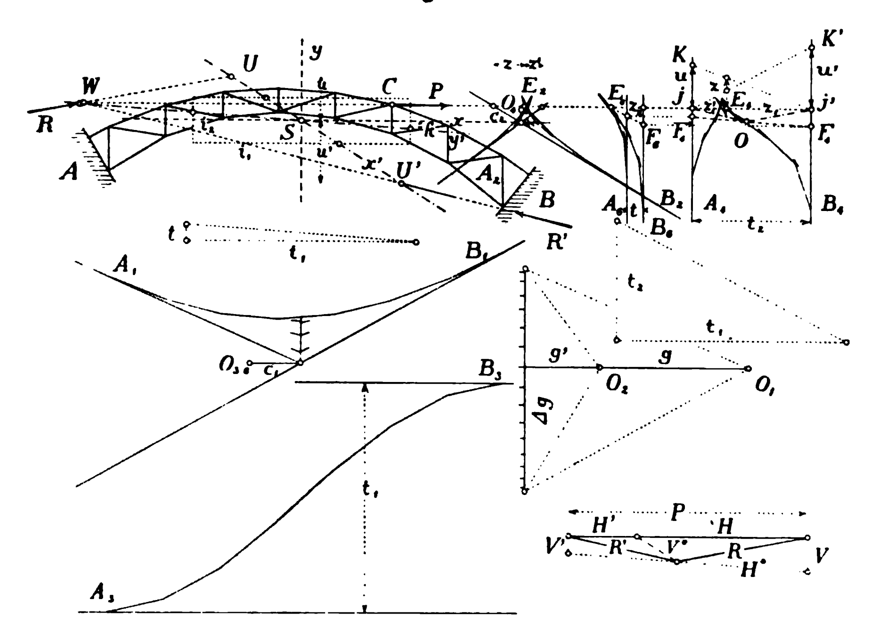
Um den Einfluss einer wagrechten Last P zu bestimmen (Fig. 116), berechnet man, wie früher, für sämtliche Gurtstäbe die elastischen Gewichte $\Delta g = \frac{s}{E F a^2}$ (Vgl. S. 197), trägt sie als lotrechte Kräfte auf und zeichnet damit das erste Seileck. Die Polweite nimmt man gleich der Summe aller Gewichte an. Hierauf lässt man die Gewichte wagrecht wirken und zeichnet das zweite Seileck. Die Polweite g' macht man, um grössere Genauigkeit zu erzielen, kleiner als g. Die Seiten des zweiten Seilecks laufen senkrecht zu den Strahlen des Kraftecks. Diese zwei Seilecke bestimmen den Schwerpunkt S. Nun betrachtet man, wie früher, die Abschnitte des ersten Seilecks als Kräfte und zeichnet mit dem Pole O_3 das dritte Seileck. Ebenso betrachtet man die Abschnitte des zweiten Seilecks als Kräfte und zeichnet mit dem Pole O_4 das vierte Seileck. Soweit stimmt die Zeichnung mit derjenigen für lotrechte Belastung überein. Das frühere fünfte Seileck wird jedoch weggelassen und an dessen Stelle ein sechstes gezeichnet, in welchem die Abschnitte des ersten als wagrechte Kräfte wirken. Seine Seiten laufen senkrecht zu den Strahlen aus O_6. Es empfiehlt sich, die Polweite c_1 von $O_{3 \cdot 6}$ nicht zu gross zu wählen.

Als Angriffspunkte werden bei Fachwerkbogen durchgehends die Drehpunkte der Gurtstäbe benutzt. Ist der Bogen vollwandig, so bilden beim ersten und zweiten Seilecke die Schwerpunkte der Bogenelemente die Angriffspunkte, bei den folgenden dagegen die Antipole der Hauptachsen hinsichtlich der Elastizitätsellipsen der Elemente. Beim dritten und sechsten Seileck sind die Antipole der y-Achse, beim vierten diejenigen der x-Achse massgebend. (Vgl. S. 231.) Nun ergeben sich, wie früher, die Halbmesser der Elastizitätsellipse des ganzen Bogens $i_1 = \sqrt{c_1\, t_1}$ und $i_2 = \sqrt{\frac{g'}{g} c_2\, t_2}$. Bezeichnet man die Ordinate des Berührungspunktes der lotrechten Tangente an die Ellipse mit k, so ist das Zentrifugalmoment sämtlicher Gewichte gleich $g\, i_1\, k$. Es ist aber auch gleich $g\, c_1\, t$, somit ist $k = \frac{c_1\, t}{i_1} = \frac{t\, i_1}{t_1}$ oder $k : i_1 = t : t_1$. Bildet man aus t und t_1 ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 116), so läuft der zur y-Achse konjugierte Durchmesser parallel zur Hypotenuse. Damit sind die Berührungspunkte der lotrechten Tangenten bestimmt. Zwei Parallele zur Diagonale des Tangentenrechtecks durch diese Punkte ergeben die Berührungs-

punkte der wagrechten Tangenten. Die Ellipse kann jetzt leicht gezeichnet werden. Wir wollen den ersten konjugierten Durchmesser die y'-Achse, den zweiten die x'-Achse nennen.

Hält man nun den Bogen in B fest und denkt sich S mit A durch einen starren Stab verbunden, so vollzieht der Schwerpunkt infolge der belastenden Kraft P eine Drehung, eine wagrechte und eine lotrechte Verschiebung. Die Drehung ist gleich der Kraft P mal dem statischen Momente der zwischen C und B liegenden Gewichte Δg bezogen auf die Kraftrichtung, also $\delta = Pgz$. Die wag-

Fig. 116.



rechte Verschiebung ist gleich P mal dem Zentrifugalmoment der Gewichte bezogen auf die Kraftrichtung und die x-Achse, also $h = Pg' c_2 z_1$. In gleicher Weise ergibt sich $v = Pg c_1 z_2$. Die Strecken z, z_1 und z_2 werden durch die Seilecke 2, 4 und 6 geliefert und sind die auf der Kraftrichtung gemessenen Abschnitte zwischen den Punkten E_2, E_4, E_6 und den Endseiten der drei Seilecke.

Die Kraft P steht mit den beiden Auflagerdrücken R und R' im Gleichgewicht (Fig. 116 rechts unten). Die Kraft R muss obige Bewegungen des Punktes S wieder rückgängig machen. Wie früher zerlegen wir R in eine durch S gehende Parallelkraft und ein Kräfte-

paar M, dann wird die Drehung durch das Moment M rückgängig gemacht. Folglich ist $\delta = Mg$ oder $M = Pz$. Ferner zerlegen wir die durch S gehende Kraft R parallel zur x- und x'-Achse in die Komponenten H und V^*. Da nun der Antipol der Kraft V^* im unendlich fernen Punkt der x-Achse liegt, bewirkt diese Kraft ausschliesslich eine lotrechte Verschiebung des Punktes S. Folglich muss H die wagrechte Verschiebung zu nichte machen, woraus folgt $h = Hg\,i_2{}^2 = Hg'\,c_2\,t_2$ oder, durch Gleichsetzung beider h, $H = \frac{Pz_1}{t_2}$. Zerlegt man drittens R parallel zur y- und y'-Achse in V und H^*, so muss V die lotrechte Bewegung vernichten, woraus folgt $v = Vg\,i_1{}^2 = Vg\,c_1\,t_1$ oder $V = \frac{Pz_2}{t_1}$.

Betrachtet man in gleicher Weise den rechtsseitigen Auflagerdruck R', so findet man dessen Komponenten $H' = \frac{Pz_1'}{t_2}$ und $V' = \frac{Pz_2'}{t_1}$, wobei z_1' und z_2' die Entfernungen der Punkte E_4 und E_6 von den Anfangsseiten der Seilecke 4 und 6 bedeuten.

Wählt man den Kräftemassstab derart, dass $P = t_2$ wird, so wird $H = z_1$ und $H' = z_1'$, ferner $V = \frac{z_2\,t_2}{t_1}$. Bildet man aus t_1 und t_2 ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 116 rechts) und zieht durch E_6 eine Parallele zur Hypotenuse, so werden auf den Endseiten des sechsten Seilecks die Werte V und V' abgeschnitten. Lotet man sie herüber ins vierte Seileck, so bekommt man die Punkte F_4 und F_4', und zieht man noch durch E_4 eine Parallele $E_4\,O$ zur x'-Achse, so bekommt man eine dem Kraftdreieck PRR' ähnliche Figur. Verbindet man schliesslich O mit J und J', so erhält man die Richtungen der Auflagerdrücke.

Um die Lage der Kraft R zu erhalten, zerlegt man R im Punkte U in H und V^* und bekommt $M = Hu$ oder $u = \frac{z\,t_2}{z_1}$. Um diese Grösse graphisch zu ermitteln, trägt man im Punkte E_4 die Strecke z lotrecht auf und verbindet ihren Endpunkt mit J', so wird die Strecke $u = JK$ abgeschnitten. Dadurch ist der Punkt U und somit auch die Lage von R bestimmt. Verbindet man den Endpunkt von z' mit J, so wird $u' = J'K'$ abgeschnitten und damit der Punkt U' bestimmt. Die beiden Kräfte R und R' müssen sich bei richtiger Arbeit auf der Kraftlinie schneiden.

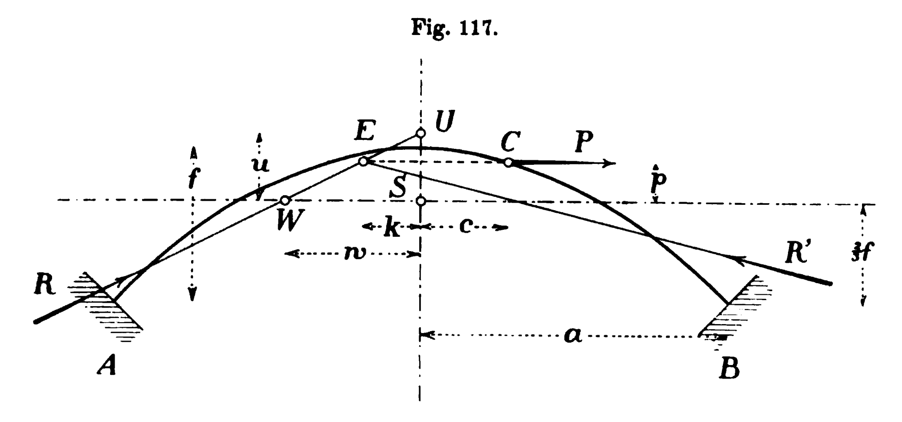
Auch der Punkt W, in welchem die Kraft R die y'-Achse schneidet, lässt sich leicht bestimmen; seine Abszisse ist $w = \frac{z t_1}{z_2}$; doch ist die Bestimmung von u bequemer und ausreichend.

Bei flachen Bogen empfiehlt es sich zur Erhöhung der Genauigkeit, die Polweite von O_2 kleiner als g zu machen. Wählt man sie z. B. gleich $1/3\,g$, so werden die Seilecke 2 und 4 wagrecht im Verhältnis 1 : 3 verzerrt, während die übrigen unverändert bleiben. Infolgedessen ist $i_2 = \sqrt{\frac{c_2 t_2}{3}}$ und $M = \frac{g z}{3}$. Die übrigen Ausdrücke bleiben die alten. Bei symmetrischer Bogenform wird $t = 0$ und die Achsen x' und y' fallen mit y und x zusammen. Das Seileck 6 muss nichtsdestoweniger gezeichnet werden, dagegen braucht man die Seilecke 1 und 3 nur bis zur Mitte zu führen.

Bewegt sich die Last P über den ganzen Bogen, so beschreibt der Schnittpunkt der Reaktionen die Kämpferdrucklinie und R und R' bilden die Tangenten an die zwei Umhüllungskurven. (Vgl. weiter unten.)

Ist die Bogenachse eine Parabel und das Trägheitsmoment des Querschnittes im Sinne der Nr. 65 konstant, so lassen sich

Fig. 117.



Kämpferdruck- und Umhüllungslinien durch Formeln berechnen. (Fig. 117.)

Es ist (S. 245) die Gleichung der Bogenachse bezogen auf S $y = 1/3 f - \frac{f x^2}{a^2}$, also $d y = -\frac{2 f x}{a^2} d x$. Die Ordinate des Angriffs-

punktes C der Kraft P ist $p = 1/3 f - \frac{f c^2}{a^2}$. Das elastische Gewicht eines Elementes, wenn man E und J_0 gleich 1 setzt, ist $dg = dx$ (S. 245) und das ganze Gewicht $g = 2a$. Ferner ist die wagrechte Halbachse der Elastizitätsellipse $i_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ und die lotrechte $i_2 = \sqrt{4/45 f^2 + i^2}$, worin $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ den Trägheitshalbmesser des Querschnittes bezeichnet. Um allzugrosse Umständlichkeiten zu vermeiden, nehmen wir in den nachfolgenden Berechnungen $i = 0$ an.

Nun ist

$$g z = \int_c^a dg\,(p - y) = \frac{(a-c)(3a^2 p + acf + c^2 f)}{3a^2} = \frac{(a-c)^2(a+2c)f}{3a^2},$$

$$g c_2 z_1 = \int_c^a dg(p-y)y = -pf\frac{(a^2-c^2)c}{3a^2} + f^2\frac{-4a^5 + 5a^4c - 10a^2c^3 + 9c^5}{45a^4}$$

$$= -\frac{2(a-c)^3(2a^3 + 4a^2c + 6ac^2 + 3c^3)f^2}{45a^4}.$$

Setzt man $c = -a$, so wird

$$g c_2 t_2 = -\frac{8af^2}{45}, \text{ woraus } t_2 = \frac{4f^2}{45 c_2}.$$

Ferner ist

$$g c_1 z_2 = \int_c^a dg(p-y)x = \frac{(a^2-c^2)(6a^2p + a^2f + 3c^2f)}{12a^2} = \frac{(a^2-c^2)^2 f}{4a^2}.$$

Nach früher (Nr. 65) ist $t_1 = \frac{a^2}{3c_1}$.

Nun wird

$$H = \frac{Pz_1}{t_2} = \frac{(a-c)^3(2a^3 + 4a^2c + 6ac^2 + 3c^3)}{4a^5}.P.$$

$$V = \frac{Pz_2}{t_1} = \frac{3(a^2-c^2)^2 f}{8a^5}.P.$$

Ferner wird

$$u = \frac{z t_2}{z_1} = \frac{2a^2(a+2c)f}{3(2a^3 + 4a^2c + 6ac^2 + 3c^3)}$$

und

$$w = \frac{z t_1}{z_2} = \frac{4a^2(a+2c)}{9(a+c)^2}.$$

Setzt man $u - p : k = V : H$, so wird

$$k = \frac{2c^3}{a^2} \quad \text{oder} \quad k^2 = \frac{4a^2(f-3p)^3}{27f^3}.$$

Die Kämpferdrucklinie ist, wie man sieht, vom dritten Grade. Für $p = 1/3f$ wird $k = 0$ und für $p = -2/3f$ wird $k = 2a$. Die Gleichung der Umhüllungskurve zu berechnen, mögen andere unternehmen, sie wird vom sechsten Grade.

Setzt man $\frac{c}{a}$ =	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
so wird $\frac{p}{f}$ =	0,333	0,323	0,293	0,243	0,173	0,083	−0,027	−0,157	−0,307	−0,477	−0,667
$\frac{k}{a}$ =	0,000	0,002	0,016	0,054	0,128	0,250	0,432	0,686	1,024	1,458	2,000
$\frac{u}{f}$ =	0,333	0,325	0,305	0,279	0,253	0,227	0,208	0,183	0,164	0,148	0,133
$\frac{w}{a}$ =	0,444	0,441	0,432	0,421	0,408	0,395	0,382	0,369	0,356	0,344	0,333

Mit Hilfe dieser Zahlen lassen sich die Kämpferdruck- und Umhüllungskurven leicht zeichnen.

68. Schiefe Belastungen.

Hat ein gelenkloser Bogen eine Reihe schief gerichteter, aber unter sich paralleler Lasten zu tragen, so berechnet man die Auflagerdrücke am besten in der Weise, dass man die y-Achse parallel zu den Kräften und die x-Achse dazu senkrecht stellt. Man denkt sich gewissermassen, der Bogen werde in der Ebene selbst so gedreht, dass die Lasten lotrecht laufen. Freilich wird hierbei ein ursprünglich symmetrischer Bogen unsymmetrisch und es sind zur Berechnung die Regeln der Nr. 62 anzuwenden. Sonst aber ergeben sich keine Schwierigkeiten oder neue Massnahmen.

Laufen die Kräfte flacher als 45°, so wird man vorziehen, das Verfahren der Nr. 67 anzuwenden, wo die Lasten wagrecht wirkend vorausgesetzt werden. Man macht die Kraftrichtung zur x-Achse und die darauf senkrecht stehende zur y-Achse parallel.

69. Beliebig gerichtete Belastungen.

Ruhen auf einem Bogen Lasten von verschiedener Richtung, so kann man sie an ihren Angriffspunkten in lotrechte und wagrechte Komponenten P_1 und P_2 zerlegen, die ersteren nach Nr. 55, die

letzteren nach Nr. 67 behandeln und die sich ergebenden Auflagerdrücke zusammensetzen.

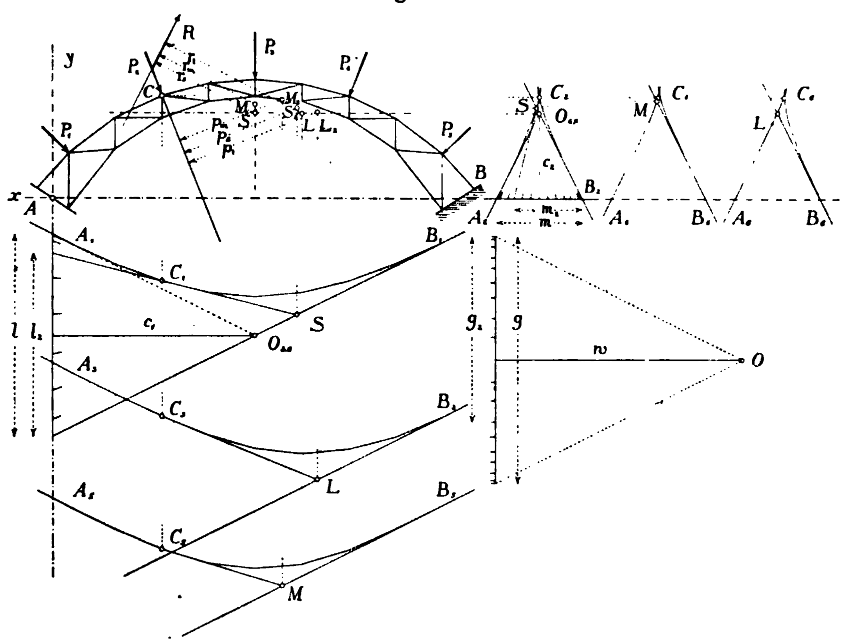
Man bestimmt also zunächst für die lotrechten Komponenten $M_1 = \Sigma(P_1 z)$, $V_1 = \frac{\Sigma(P_1 z_1)}{t_1}$ und $H_1 = \frac{\Sigma(P_1 z_2)}{t_2}$, wobei die z den Seilecken 1, 3 und 5 zu entnehmen sind. Hierauf berechnet man für die wagrechten Komponenten $M_2 = \Sigma(P_2 z)$, $V_2 = \frac{\Sigma(P_2 z_2)}{t_1}$ und $H_2 = \frac{\Sigma(P_2 z_1)}{t_2}$, wobei die z von den Seilecken 2, 4 und 6 geliefert werden. Hierauf erhält man in $V = V_1 + V_2$ die lotrechte und $H = H_1 + H_2$ die wagrechte Komponente des Auflagerdruckes R. Endlich ist $r = \frac{M_1 + M_2}{R}$ die Entfernung dieser Kraft vom Punkte S. Die Multiplikation der P mit den entsprechenden z wird am einfachsten zahlenmässig ausgeführt, da der zeichnerische Weg gewöhnlich umständlicher ausfällt.

Neben diesem Verfahren gibt es ein zweites, das unmittelbar, aber kaum rascher zum Ziele führt. Man wählt (Fig. 118) den Punkt A des Bogens als Ursprung eines Achsenkreuzes x, y. Ferner berechnet man in gewohnter Weise die elastischen Gewichte $\Delta g = \frac{s}{E F a^2}$ und lässt sie erst lotrecht und dann wagrecht als Kräfte wirken. Dabei erhält man die Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$. Die Abschnitte des ersteren auf der y-Achse betrachtet man wieder als Kräfte und setzt sie mit dem Pole O_3 zum dritten Seileck zusammen. Ebenso bilden die Abschnitte des zweiten Seilecks die Kräfte für das vierte. Das fünfte entsteht, wenn man die Abschnitte des zweiten lotrecht wirken lässt und das sechste, wenn man die Abschnitte des ersten als wagrechte Kräfte ansieht. Die Angriffspunkte sind jeweilen die Drehpunkte der Gurtstäbe. Die Polweiten w, c_1 und c_2 können nach Belieben angenommen werden. Mit Hilfe dieser sechs Seilecke lassen sich jetzt die Schwerpunkte der Δg, der $\Delta g . y$ und der $\Delta g . x$ für beliebige Bogenstücke finden. Wir nennen sie S, M und L.

Nun wollen wir beispielsweise die Kraft P_2 betrachten und ihren Auflagerdruck R_2 bestimmen. Zu dem Zwecke fassen wir die Gewichte Δg von P_2 bis B zusammen; ihre Summe sei g_2 und ihr Schwerpunkt S_2. Um diesen zu finden, loten wir den Angriffspunkt C der Last P_2 herunter nach C_1 im ersten Seil-

eck, verlängern die entsprechende Seilseite bis zum Schnittpunkt S mit der Endseite und ziehen eine Lotrechte durch diesen Punkt, auf welcher S_2 liegen muss. Dann loten wir C herüber in das zweite Seileck und verfahren in gleicher Weise. Dadurch erhalten wir S_2. Der Schwerpunkt der Gewichte $\Delta g \cdot y$ sei M_2. Dieser wird aus dem vierten und fünften Seileck gefunden; denn im vierten wirken die $\Delta g \cdot y$ als wagrechte, im fünften als lotrechte Kräfte. Verlängert man in diesen beiden Seilecken die Seiten, auf welchen

Fig. 118.



die Punkte C_4 und C_5 liegen, bis zum Schnitt mit der entsprechenden Endseite, so führen eine wagrechte und eine senkrechte Linie durch diese Schnittpunkte auf den gesuchten Punkt M_2. Schliesslich ergeben das dritte und sechste Seileck den Schwerpunkt L_2 der $\Delta g \cdot x$.

M_2 und L_2 sind nichts anderes als die Antipole der x- und y-Achse hinsichtlich der Elastizitätsellipse des Bogenstückes $P_2 B$.

Denkt man sich jetzt den Bogen in B festgehalten und in A frei schwebend, so ergeben sich die Formänderungen des Punktes A unter der Wirkung von P_2 wie folgt: (Vgl. die Sätze auf S. 56.)

Die Kraft P_2 erzeugt zunächst eine Drehung, die gleich ist der Kraft mal dem statischen Momente der elastischen Gewichte bezogen auf die Kraftrichtung, also

$$\delta = P_2 g_2 p_s.$$

Ferner erzeugt die Kraft P_2 eine wagrechte Verschiebung des Punktes A, gleich der Kraft mal dem Zentrifugalmoment der Gewichte bezogen auf die Kraft- und die Verschiebungsrichtung. Dieses Zentrifugalmoment ist gleich dem statischen Moment bezogen auf die Verschiebungsrichtung mal p_m, also gleich $w\, m_2 p_m$, folglich ist

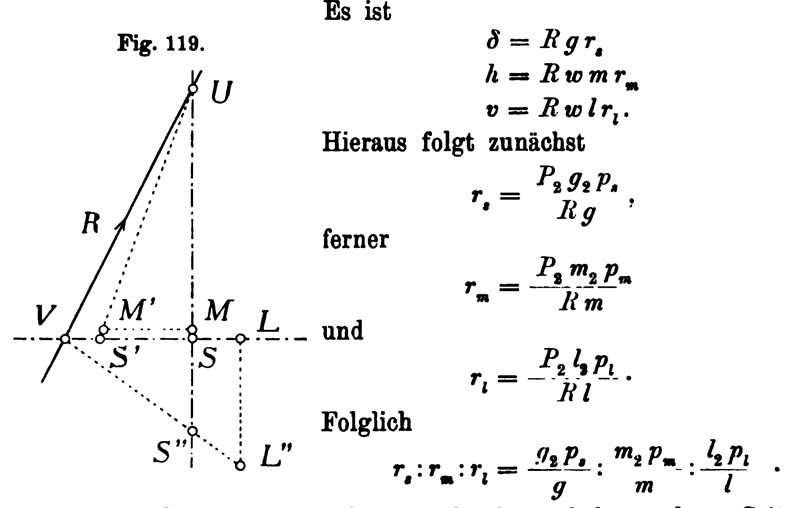
$$h = P_2 w\, m_2 p_m.$$

In gleicher Weise findet man die Vertikalbewegung

$$v = P_2 w\, l_2 p_l.$$

Auf dem nämlichen Wege, wie S_2, M_2 und L_2 gefunden werden, findet man die Punkte S, M und L für den ganzen Bogen. Ihre Abstände von R seien r_s, r_m und r_l. Die Kraft R muss nun so beschaffen sein, dass sie obige Formänderungen rückgängig macht. Es ist

Fig. 119.



$$\delta = R g r_s$$
$$h = R w m r_m$$
$$v = R w l r_l.$$

Hieraus folgt zunächst

$$r_s = \frac{P_2 g_2 p_s}{R g},$$

ferner

$$r_m = \frac{P_2 m_2 p_m}{R m}$$

und

$$r_l = \frac{P_2 l_2 p_l}{R l}.$$

Folglich

$$r_s : r_m : r_l = \frac{g_2 p_s}{g} : \frac{m_2 p_m}{m} : \frac{l_2 p_l}{l}.$$

Nun rechnet man die drei Ausdrücke auf der rechten Seite der Proportion, nachdem man die einzelnen Längen in der Figur abgegriffen hat, zahlenmässig aus. Dann trägt man (Fig. 119) $SS' = \frac{g_2 p_s}{g}$ und $MM' = \frac{m_2 p_m}{m}$ auf und zieht $S'M'U$. Ferner trägt man $SS'' = \frac{g_2 p_s}{g}$ und $LL'' = \frac{l_2 p_l}{l}$ auf und zieht $L''S''V$. Nun gibt VU Richtung und Lage der Kraft R an. Die Grösse

findet man schliesslich aus $R = \frac{P_2 g_2 p_s}{g r_s}$, wodurch der linksseitige Auflagerdruck bestimmt ist.

Damit ist die Aufgabe für eine einzelne Last gelöst. Handelt es sich um mehrere Lasten, so müssen zunächst für jede einzelne die drei Punkte S, M und L ermittellt werden, wozu die sechs Seilpolygone benutzt werden. Dann addiert man die δ, h und v für sämtliche Lasten und hat endlich

$$r_s : r_m : r_l = \frac{\Sigma(P_i g_i p_s)}{g} : \frac{\Sigma(P_i m_i p_m)}{m} : \frac{\Sigma(P_i l_i p_l)}{l}$$

und

$$R = \frac{\Sigma(P_i g_i p_s)}{g r_s}.$$

Die Werte P_i, g_i, m_i, l_i, p_s, p_m und p_l schreibt man, um die Produkte und ihre Summen leichter und sicherer berechnen zu können, am besten in Tabellenform auf.

Das hier auseinandergesetzte Verfahren zur Berechnung der Auflagerdrücke für beliebig gerichtete Lasten ist in der Hauptsache zuerst von Ingenieur F. Bohny (Schweiz. Bauzeitung 15. Mai 1897) beschrieben worden und zwar an einem geschlossenen Fachwerkring. Es sieht umständlicher aus, als es tatsächlich ist. Was den Mittelpunkt des Achsenkreuzes anbetrifft, so kann jeder beliebige Punkt dafür gewählt werden. Die Lösung würde in gewisser Hinsicht vereinfacht, wenn man den Punkt S hierfür benützte; doch ist diese Wahl nicht vorteilhaft, weil dabei einzelne der Punkte M weit abseits oder gar ins Unendliche zu liegen kommen. Zugunsten von A spricht ausserdem, dass die statischen, Trägheits- und Zentrifugalmomente alle gleiche Vorzeichen erhalten. Ob man unter A einen Knotenpunkt des Fachwerkes oder einen beliebigen andern versteht, ist ziemlich gleichgültig.

Da die Angriffspunkte der Lasten in der Regel Knotenpunkte sind, so kann man im Zweifel sein, ob man den zugehörigen Gurtungsstab zu der betrachteten Stabgruppe zählen soll oder nicht. Im Grunde genommen macht das keinen Unterschied, nur muss man in sämtlichen Seilecken gleich verfahren, also die einmal bestimmte Stabgruppe beibehalten.

Handelt es sich um einen vollwandigen Bogen, so treten an Stelle der Stabgruppen gebogene (unter Umständen auch geradlinige) Bogenstücke. Diese teilt man, wie früher (Nr. 61), in Elemente ein und zeichnet ihre Elastizitätsellipsen. Bei den Seilecken 1 und 2 bilden dann die Schwerpunkte, bei 3 bis 6 die Antipole der Koordinatenachsen die Angriffspunkte (S. 231). Was die Einteilung des Bogens in Elemente betrifft, so beschränkt man deren Zahl so viel als möglich. Ist das Trägheitsmoment des Querschnittes konstant und verläuft der

Bogen zwischen zwei Angriffspunkten geradlinig, so fasst man dieses ganze Stück als ein Element auf. Ist der Bogen krummlinig, so teilt man ihn so ein, dass die einzelnen Elemente als Parabelstücke angesehen werden dürfen. Das elastische Gewicht eines Elementes ist dann (vgl. Nr. 65) gleich $\frac{2a}{EJ}$. Der Punkt S liegt in 2/3 der Pfeilhöhe des Elementes und die Achsen der Ellipse sind $i_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ und $i_2 = \sqrt{\frac{4}{45}f^2 + \frac{J}{F}}$.

Bei stark veränderlichem Trägheitsmoment müssen die Elemente entsprechend kürzer gemacht werden, so dass man für J ohne grossen Fehler einen Durchschnittswert einführen kann.

70. Der belastete Stabring.

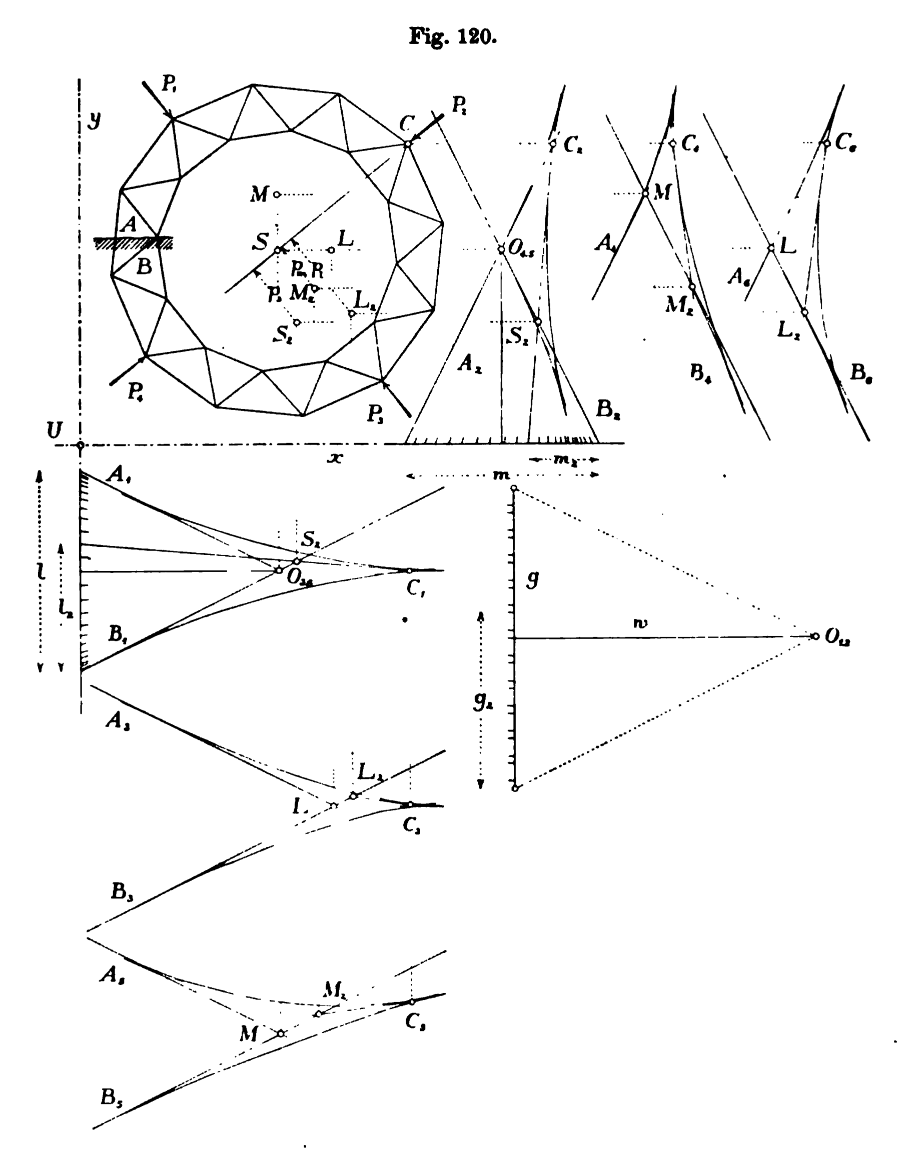
Das soeben beschriebene Verfahren zur Berechnung eines Bogenträgers mit beliebig gerichteten Lasten kann auch zur Berechnung eines geschlossenen, beliebig geformten und beliebig belasteten Ringes verwendet werden. Der durch die Fig. 120 dargestellte Ring werde durch vier Kräfte belastet, die unter sich im Gleichgewicht stehen; es soll deren Drucklinie bestimmt werden.

Man zeichnet ein Achsenkreuz x, y, dessen Ursprung U nach Belieben gewählt werden kann. Den Ring denkt man sich bei AB durchgeschnitten, hält das eine Ende B fest und bestimmt die Bewegungen, welche das andere Ende A unter der Wirkung der Lasten vollzieht. Diesen Bewegungen muss eine Kraft R entgegenwirken; das ist nichts anderes, als die durch den Schnitt AB gehende Seite der Drucklinie.

Man betrachtet wiederum die Gewichte $\Delta g = \frac{s}{EFa^2}$ als Kräfte, lässt sie erst lotrecht, dann wagrecht wirken und erhält dadurch die Seilecke $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$. Dann zeichnet man mit den Abschnitten des ersten Seilecks das dritte und sechste, mit den Abschnitten des zweiten die Seilecke 4 und 5. Mit Hilfe dieser Seilecke bestimmt man die Schwerpunkte der Δg, der $\Delta g \cdot y$ und der $\Delta g \cdot x$ für die Bogenstücke B bis P_1, B bis P_2 u. s. w. Diese findet man wie in der vorigen Nummer, indem man die Seilseiten, auf welchen

die Punkte C_1, C_2 u. s. w. liegen, verlängert und mit den Endseiten aus B_1, B_2 u. s. w. zum Schnitt bringt.

Fig. 120.



Für die Stabgruppe B bis P_2 sind die betreffenden Linien und Punkte eingezeichnet. Der Schwerpunkt der Gewichte ist S_2, die Schwerpunkte der statischen Momemte sind M_2 und L_2. Führt

man die Zeichnung schliesslich noch für sämtliche Stäbe aus, so bekommt man die Punkte S, M und L.

Nun hat man, wie oben, die Formänderungen, bewirkt durch die Last P_2,

$$\delta = P_2\, g_2\, p_s$$
$$h = P_2\, w\, m_2\, p_m$$
$$v = P_2\, w\, l_2\, p_l.$$

Gleiche Ausdrücke ergeben sich für die übrigen Kräfte. Durch Summation erhält man die Gesamtwerte $\Sigma(\delta)$, $\Sigma(h)$ und $\Sigma(v)$.

Diese Bewegungen müssen durch die Kraft R vernichtet werden Es ist daher auch

$$\Sigma(\delta) = R\, g\, r_s$$
$$\Sigma(h) = R\, w\, m\, r_m$$
$$\Sigma(v) = R\, w\, l\, r_l.$$

Durch Gleichsetzung findet man

$$r_s : r_m : r_l = \frac{\Sigma(P_i\, g_i\, p_s)}{g} : \frac{\Sigma(P_i\, m_i\, p_m)}{m} : \frac{\Sigma(P_i\, l_i\, p_l)}{l}$$

und

$$R = \frac{\Sigma(P_i\, g_i\, p_s)}{g\, r_s},$$

wodurch Richtung, Lage und Grösse von R bestimmt sind.

Die Strecken m, l, m_i, l_i, p_s, p_m und p_l werden am besten mit dem Massstab gemessen und die Produkte und Summen zahlenmässig bestimmt. Ist die Kraft R gefunden, so lassen sich aus ihr und den gemessenen Kräften P ein Krafteck und mit dessen Hilfe die Drucklinie zeichnen. Will man schliesslich die Stabkräfte kennen, so führt ein Cremona-Plan zum Ziele.

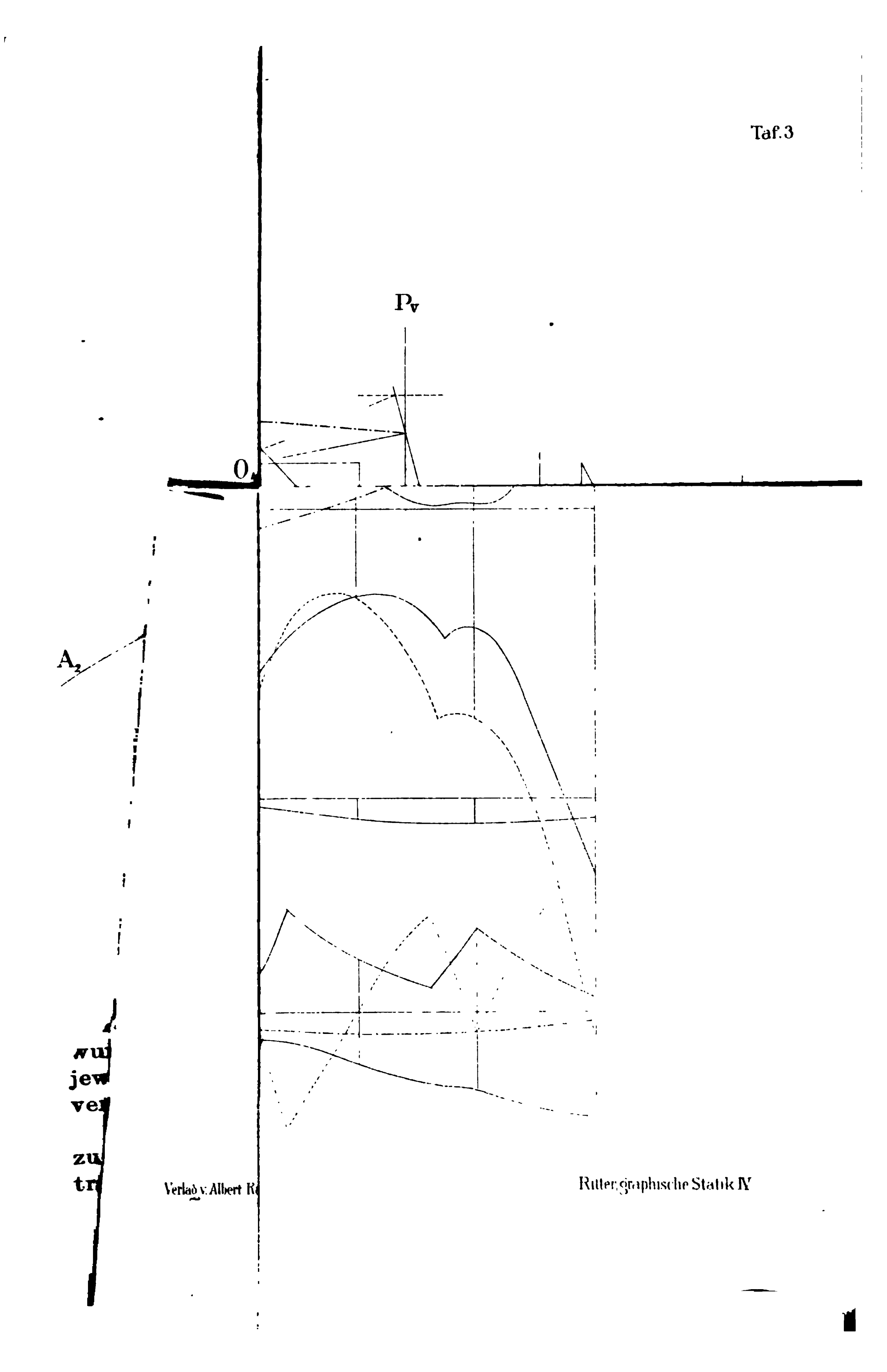
Bei vollwandigem Ring treten an Stelle der Stäbe die Bogenelemente. Bei Seileck 1 und 2 greifen die Kräfte in den Schwerpunkten, bei den folgenden in den Antipolen der Achsen bezüglich der Elastizitätsellipsen der Elemente an. (Vgl. S. 231.)

71. Berechnung eines Bogens ohne Gelenke

(Kirchenfeldbrücke in Bern.)

(Tafel 3.)

Auf Tafel 3 haben wir einen gelenklosen Bogen behandelt. Wir wählten dazu den linken Bogen der Kirchenfeldbrücke in Bern. Es ist dies eine Strassenbrücke, deren Fahrbahn durch fünf Joche



Taf. 3
P_v
O
A_2
wu
jew
ve
zu
tr
Verlag v. Albert R
Ritter, graphische Statik IV

auf die beiden Bogenträger gestützt wird. Die Ständer sind in Abständen von 14,325 m symmetrisch zur Mitte angeordnet. Der Bogen selber ist unsymmetrisch, kreisförmig, hat eine Spannweite von 80,72 m horizontal gemessen und 81,07 m geneigt gemessen und eine Pfeilhöhe von 22,6 m. Er ist durchgehend fachwerkförmig, und die Bogenhöhe beträgt im Scheitel 1,5 m und am Kämpfer 2,8 m.

a) Elastizitätsellipse.

Zunächst werden nach bekannter Regel die elastischen Gewichte $\Delta g = \frac{s}{F a^2}$ für sämtliche Gurtungsstäbe berechnet. Den Elastizitätskoeffizienten E haben wir gleich eins gesetzt. Die Zeichnung der fünf Seilpolypone und der Elastizitätsellipse des ganzen Bogens gestaltet sich nach Nr. 63 bequemer und genauer, wenn man den Bogen der Pfostenteilung entsprechend in Stücke zerlegt und zunächst die Konstruktion für jedes dieser Stücke durchführt. Wie Fig. 112 (S. 238) zeigt, werden die elastischen Gewichte der zu einem Stück gehörigen Stäbe als Kräfte aufgetragen und mit Hilfe der Seilpolypone zuerst der Schwerpunkt und dann die Halbmesser der Trägheitsellipsen bestimmt; $i_1 = \sqrt{c_1 t_1}$ und $i_2 = \sqrt{\frac{g' c_2 t_2}{g}}$. Schliesslich ermittelt man noch die Entfernung des Berührungspunktes der wagrechten Tangente von der y-Achse, $k = \frac{t i_2^2}{t_2}$. Diese Arbeit muss man, da der Bogen unsymmetrisch ist, für alle sechs Stücke durchführen.

Nun fasst man die Stabgewichte gruppenweise zusammen und führt mit den sechs Gruppengenwichten die Zeichnung des ganzen Bogens durch, wie es in Nr. 63 beschrieben ist. Dadurch erhalten wir die fünf Seilpolypone für den ganzen Bogen, mit deren Hilfe man zunächst die Gesamtellipse und sodann die Auflagerdrücke für Einzellasten ermittelt. (Vgl. Fig. 111, S. 234.) Wenn richtig gearbeitet wurde, müssen sich natürlich die beiden Auflagerdrücke R und R' jeweilen auf der zugehörigen Last schneiden und diese Schnittpunkte verbunden eine stetige Kämpferdrucklinie ergeben.

Die Halbachsen der Gesamtellipse finden wir auf der Zeichnung zu $i_1 = 4{,}64$ cm und $i_2 = 1{,}31$ cm, ihre wirklichen Längen betragen also $i_1 = 23{,}20$ m und $i_2 = 6{,}55$ m. Ferner ist der Abstand

des Berührungspunktes der wagrechten Tangente von der y-Achse $k_2 = 1,43$ cm, d. h. 7,15 m, derjenige der lotrechten Tangente von der x-Achse $k_1 = 0,40$ cm, d. h. 2,00 m. Diese beiden Punkte liefern die Richtungen der zur x- und y-Achse konjugierten Durchmesser. Die Berührungspunkte der lotrechten Tangenten können übrigens auch gefunden werden, wenn man durch die Berührungspunkte der wagrechten Tangenten Parallele zum Durchmesser des Tangentenvierecks zieht (S. 235).

b) Einfluss des Eigengewichtes.

Das Eigengewicht wird in zwei Teilen in Rechnung gezogen. Der eine Teil umfasst das Gewicht der Fahrbahn, der Joche und der Windstreben (g') und greift in fünf Punkten am Bogenträger an. Der andere Teil umfasst das Gewicht des Bogenträgers (g'') und wird als ungleichförmig verteilte Last betrachtet.

Aus dem ersten Teil des Eigengewichtes ergeben sich folgende Einzelkräfte $P_{I} = 77$ t, $P_{II} = 74$ t, $P_{III} = 73$ t, $P_{IV} = 74$ t und $P_{V} = 77$ t. Grösse und Richtung der Auflagerdrücke dieser Kräfte findet man aus dem dritten Seileck, wo sie für eine Last $P = t_1$ konstruiert wurden. Für die Last P_{III} ist die Konstruktion eingezeichnet, bei den übrigen haben wir uns auf das Zeichnen der Reaktionen beschränkt. Ganz wie beim älteren Verfahren (Nr. 64) reiht man nun sowohl die linksseitigen wie die rechtsseitigen Auflagerdrücke aneinander und erhält dadurch Grösse und Richtung der Gesamtreaktionen. Mittels zweier Seilpolypone, deren Seiten parallel zu den Strahlen aus den Polen M und N laufen, findet man auch ihre Lage und kann nun leicht die Drucklinie einzeichnen, die eine gute Probe für die Genauigkeit der Zeichnung liefert.

Auch für den zweiten Teil des Eigengewichtes wird die Drucklinie gezeichnet, die wir aber der grösseren Übersichtlichkeit wegen nicht eingetragen haben. Um grössere Genauigkeit zu erzielen, tut man gut, auch diesen Teil des Eigengewichtes zuerst in fünf Einzelasten zu konzentrieren, $P_{I} = 18$ t, $P_{II} = 16$ t u. s. w., und dafür die Drucklinie zu zeichnen, indem man genau wie beim ersten Teil vorgeht. Die richtige Drucklinie kann dann leicht eingetragen werden.

Die Stabkräfte werden nun mit Hilfe zweier Cremona-Pläne bestimmt, der eine liefert die Krätte $P_{g'}$ und der andere die $P_{g''}$. Der grösseren Genauigkeit wegen muss man einzelne Gurtstäbe nach dem Momentenverfahren berechnen und die Cremona-Pläne damit

kontrollieren. So findet man z. B. für den Obergurtstab 13 die Kräfte $P_{g'} = 88$ t und $P_{g''} = 14$ t.

Man kann auch alle Stabkräfte mit Hilfe der zwei Drucklinien rechnerisch ermitteln. Für die Gurtungen verwendet man das Momentverfahren und für die Streben und Pfosten das Schnittverfahren. (Vgl. Teil II, Nr. 6 und 4.) Der Einfluss des zweiten Teiles des Eigengewichtes auf die Füllungsglieder kann dabei vernachlässigt werden, da die entsprechende Drucklinie nahezu parallel zu den Gurtungen verläuft und die Stabkräfte infolgedessen sehr gering ausfallen.

c) Einfluss der zufälligen Last.

Diese greift ausschliesslich an den fünf Jochpunkten an. Setzt man eine gleichförmig verteilte Belastung von 0,45 t : m^2 voraus, so erhält man bei einer Strassenbreite von 13,2 m für den laufenden Meter auf einen Bogenträger eine Last $p = 2,97$ t; das gibt eine Pfostenbelastung $P = 43$ t. Wie für Eigengewicht lassen sich auch hier Grösse und Richtung der Reaktionen dieser fünf Lasten mit Hilfe der fünf Seilecke leicht ableiten.

Hier werden die Gurtungskräfte, welche die fünf Pfostenlasten hervorrufen, am besten nach dem Momentenverfahren berechnet. Die so erhaltenen Stabkräfte haben wir unter den entsprechenden Pfosten von einer Horizontalen aus mit Rücksicht auf das Vorzeichen als Ordinaten aufgetragen und ihre Endpunkte durch Gerade verbunden. Dadurch gelangen wir zu den Einflusslinien für die Gurtstäbe.

Für den Obergurtstab 13 haben wir die Einflusslinie gezeichnet. Die Pfostenlast P_{III} ruft z. B. einen linken Auflagerdruck $R = 43$ t hervor. Sein Abstand vom Drehpunkt beträgt $r = 0,64$ m und der Hebelarm des Stabes ist $a = 1,60$ m; daraus folgt $O_{13} = 17,2$ t. Diese Kraft tragen wir unter dem Pfosten III im Massstab 1 mm = 10 t auf, dann erhalten wir als Massstab für die Einflussfläche 1 cm² = 34,9 t. Betrachtet man nämlich ein Dreieck, dessen Basis vom ersten bis zum dritten Pfosten reicht, dessen Spitze unter dem zweiten Pfosten liegt und das eine Höhe von 1 mm hat, so entspricht ihm bei einer Belastung von 2,97 t/m eine Kraft von 10 t. Die Fläche des Dreiecks ist 0,1 . 2,865 = 0,2865 cm². Es bedeutet 1 cm² also $\frac{10}{0,2865} = 34,9$ t. Dieser Massstab gilt natürlich nur für die Be-

lastung $p = 2{,}97$ t/m, für jede andere ändert er sich wieder. Durch Summieren der positiven und negativen Teile der Einflussfläche erhalten wir die Grenzwerte der Stabkraft. Für den Obergurtstab 13 finden wir $O_{max} = -105$ t und $O_{min} = +55$ t.

Bei den Streben und Pfosten schlägt man einen etwas abweichenden Weg ein. Man ermittelt zuerst nach dem Schnittverfahren die Kräfte, welche aus der ersten Pfostenlast erhalten werden und trägt sie von einer Horizontalen aus als Ordinaten auf. Diese Arbeit wiederholt man dann auch für die übrigen vier Pfostenlasten. Auf unserer Tafel haben wir diese Arbeit für die Last P_{II} durchgeführt. Aus diesen fünf Kraftkurven ergeben sich dann durch Addition der entsprechenden Kräfte Maximum und Minimum der Stabkräfte.

d) Einfluss der Temperaturschwankungen.

Man denkt sich die Kraft, die infolge der Temperaturschwankungen entsteht, im Schwerpunkt der elastischen Gewichte wirken (Nr. 59) und fasst die Bewegung, welche diese Kraft hervorruft, als eine Drehung um den unendlich fernen Punkt der durch den Schwerpunkt gehenden Senkrechten zur Sehne AB auf. Dann folgt, dass die Kraft T in der Antipolaren dieses Punktes, also in der zu dieser Normalen aus AB konjugierten Richtung wirkt. Die Grösse der Temperaturkraft ist

$$T = \frac{E\alpha t l}{g\,i_2^2} = \frac{2000 \,.\, 0{,}000012 \,.\, 25 \,.\, 81{,}07}{0{,}148 \,.\, 6{,}10^2} = 8{,}83 \text{ t}.$$

Dabei ist zu beachten, dass i_2 nicht den in der Figur eingetragenen Halbmesser bedeutet, sondern denjenigen, welcher der Richtung von T entspricht. Diese Richtung fällt beinahe mit der x'-Achse zusammen; der grösseren Deutlichkeit wegen haben wir sie nicht in die Tafel eingetragen.

Die Stabkräfte ermittelt man am besten mit Hilfe eines Cremona-Planes, den man, wie die früheren, wieder nach dem Momentenverfahren kontrolliert.

e) Graphische Zusammenstellung der Stabkräfte.

Es empfiehlt sich, alle die gefundenen Stabkräfte graphisch aufzutragen. Die Kurve, welche die Kräfte der Füllungsglieder infolge der Verkehrslast verbindet, ergibt sich, wie wir oben gesehen, schon aus der Konstruktion dieser Kräfte durch Addition der Ein-

flüsse der fünf Pfostenkräfte. Aber auch bei den Gurtungen lohnt es sich, diese Kraftkurven zu zeichnen, da ein regelmässiger Verlauf einigermassen für die Richtigkeit und Genauigkeit der abgeleiteten Kräfte bürgt und sich auch das Interpolieren ausgelassener Kräfte genauer und rascher bewerkstelligen lässt. In der Nähe der Fahrbahnpfosten sollten jedoch alle Stabkräfte berechnet werden, da sich in diesen Punkten, wie man aus den Kurven sieht, extreme Werte ergeben.

Auf unserer Tafel haben wir die Kurven für den Obergurt und die Streben gezeichnet. Diejenigen der Eigengewichtskräfte haben wir gestricht eingetragen, und zwar verbindet beim Obergurt die obere Kurve die Kräfte, welche die Eigenlast g'' hervorruft, die untere Kurve diejenigen aus g'. Bei den Streben braucht, wie schon oben bemerkt, nur g' berücksichtigt zu werden. Die Kraftkurven aus der Verkehrslast haben wir ausgezogen. Die obere verbindet jeweilen die maximalen Zug- die untere die grössten Druckkräfte. Schliesslich sind noch die Temperaturkräfte aufgetragen und durch eine Kurve (strichpunktiert) verbunden worden.

Verlag von ALBERT RAUSTEIN in ZÜRICH.

Adressbuch, Schweizerisches, für Maschinenfabriken, Mechaniker und Schlosser. Leinen gebunden M. 3.20

Bauwerke der Schweiz. Herausgegeben vom Schweizer. Architekten- und Ingenieur-Verein. Heft 1. Mit 11 Tafeln. Fol. M. 7.50

— Dasselbe. Heft 2. Mit 11 Tafeln. Fol. M. 7.50

— Dasselbe. Heft 3. Mit 11 Tafeln. Fol. M. 7.50

Cadisch, H., Ingenieur, Die Abfallverbrennung vom technischen und finanziellen Standpunkte. Mit einem Atlas von 18 Tafeln. M. 4.—

Goebel, J. B. Dr., Die wichtigsten Sätze der neueren Statik. Ein Versuch elementarer Darstellung. Mit 1 Tafel. M. 1.60

Herzog, Siegfr., Maschinentechnisches Formelbuch. Alphabetische Zusammenstellung von Formeln. In Leinen gebunden M. 3.20

Lenggenhager, E., Ingenieur, Erläuterungen zu den Feuersicherheits-Vorschriften für elektrische Licht- und Kraftanlagen. Kartonniert M. 1.—

— Kleines elektrotechnisches Wörterbuch. Erklärung der elektrotechnischen Fachausdrücke. Kartonniert M. 1.20

Meyer-Baeschlin, Jos. und **J. Lepori,** Architektur, Baukonstruktion und Baueinrichtung in nordamerikanischen Städten. M. 1.—

Müller-Bertossa, Professor, Anleitung zum Rechnen mit dem logarithmischen Rechenschieber. 2. Auflage. Mit 2 Tafeln. M. 1.80

Reifer, Professor, Einfache Berechnung der Turbinen. 2. Auflage. Mit 1 Tafel und 14 Abbildungen. M. 2.50

Ritter, W., Professor, Anwendung der graphischen Statik. Nach Prof. Culmann bearbeitet. I. Teil: Die im Innern eines Balkens wirkenden Kräfte. Mit 65 Text-Figuren und 6 Tafeln. M. 8.—

— — II. Teil: Das Fachwerk. Mit 119 Text-Figuren und 6 Tafeln. M. 9.—

— — III. Teil: Der kontinuierliche Balken. Mit 184 Text-Figuren und 4 Tafeln. M. 9.60

In Leinen gebunden jeder Teil M. 1.— mehr.

— Der Brückenbau in den Vereinigten Staaten von Amerika. Mit 2 Tafeln. M. 4.60

Schindler-Escher, Klein aber Mein. 7 Projekte für einzelstehende Häuschen. Mit 8 Lichtdrucktafeln und Grundrissen. 6. Auflage. M. 2.40

Sonderegger, C., Ingenieur, L'achèvement du canal du Panama. Avec figures plans etc. M. 7.50

Specht, Tafeln der Steigungsverhältnisse von 0,5 ‰ bis 100 ‰ für die Entfernungen 1 bis 100, nebst entsprechendem Steigungswinkel nach alter und neuer Teilung. M. 2.50

Technisches von der Albulabahn. I. Die neuen Linien der Rhätischen Bahn. Von Oberingenieur F. C. S. Hennings. II. Die gewölbten Brücken der Albulabahn. Bearbeitet von der Redaktion der schweizerischen Bauzeitung. Mit 34 Abbildungen. In Mappe. 4°. M. 2.40

Tetmajer, Professor, Die äusseren und inneren Kräfte an einfachen Brücken und Dachstuhlkonstruktionen. Mit 80 Holzschnitten und 8 Tafeln. M. 9.—

— Theorie und Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers. Mit 16 Holzschnitten und 1 Tafel. M. 2.40

ANWENDUNGEN

DER

GRAPHISCHEN STATIK.

NACH

PROFESSOR DR. C. CULMANN

BEARBEITET

VON

DR. W. RITTER,

VORM. PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH.

Vierter Teil.

Der Bogen.

Mit 120 Textfiguren und 3 Tafeln.

ZÜRICH

VERLAG VON ALBERT RAUSTEIN

VORMALS MEYER & ZELLERS VERLAG

1906.

